GEOMETRIA HIPERBÓLICA-2000.2–Lista10

Professor: Ricardo Sá Earp

Nesta lista vamos completar o nosso estudo sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$.

Novamente enfatizamos que você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Você já deduziu na lista anterior a equação de curvatura de Gauss: A curvatura de Gauss é um invariante intrínseco. Em termos de coordenadas isotérmicas $z = x + iy$ pode ser escrita como

$$K = -\frac{\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde a métrica em termos das coordenadas isotérmicas $z = x + iy$, é dada por $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2 |\,\mathrm{d}z|^2$.

1) Considere o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy,\ y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{(\mathrm{Im}\, z)^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Você já demonstrou anteriormente que a curvatura de Gauss $K \equiv -1$. Mostre usando as equações das geodésicas, combinado com o teorema de existência e unicidade de geodésicas que as as semi-retas verticais (em $\mathbb{H}^2$) partindo do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^2 := \{\mathrm{Im}\, z = 0\} \cup \{\infty\}$, e os semi-círculos (em $\mathbb{H}^2$) ortogonais à $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ são as únicas geodésicas de $\mathbb{H}^2$. *Sugestão* : Talvez ajude saber que as reflexões nas tais semi-retas verticais e as inversões relativas aos tais semi-círculos são isometrias de $\mathbb{H}^3$. Você saberia demonstrar esta última afirmação ? (Veja ref. 20).

   a) Aplique o teorema de Gauss-Bonnet para demonstrar que se duas geodésicas partindo de um mesmo ponto p chegassem ao um certo ponto q de uma superfície Riemanniana de curvatura de Gauss $K \leqslant 0$, com estas bordando uma região $R \subset S$, acarretaria num absurdo.

   b) Mostre que tomando as geodésicas no plano hiperbólico como "retas", os quatro primeiros axiomas de Euclides são verificados, mas não o quinto axioma das paralelas.

2) Seja S o catenóide

   a) Mostre que a única geodésica fechada de S é o paralelo contido no plano de simetria de S.

   b) Mostre por um argumento simples e direto que S não tem pontos umbílicos, mas que S é assimptoticamente umbílica, i. e $k_1(p) - k_2(p) \to 0$, quando $|p| \to \infty$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S.

   c) Aplique o teorema de Gauss-Bonnet e estude o comportamento assimptótico numa metade do catenóide (cortado ao longo da geodésica representante da classe de homologia do fim que minimiza o comprimento de arco), para mostrar que a curvatura total do catenóide é -4π. Nota: Como já comentamos na lista anterior, a curvatura total de uma superfície mínima de curvatura total finita é $-4\pi n$, sendo n o grau da aplicação normal de Gauss. No caso do catenóide é imediato verificar que $n = 1$ (Veja ref. 14).

   d) Vamos voltar ao importante conceito de *fluxo*, definido na lista anterior. Aplicando o conceito do fluxo para superfícies mínimas, mostre que o catenóide é a única superfície mínima de revolução (veja outras interessantes aplicações na ref. 8).

3) Um teorema devido a Klotz e Osserman diz que *uma superfície completa em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura média* H *constante, cuja curvatura de Gauss* K *não muda de sinal é uma superfície mínima, ou a esfera, ou o cilindro circular reto.* Vamos estudar este resultado.

   a) Suponha que $K \leqslant 0$ (e H =constante $\neq 0$). Escolha parâmetros isotérmicos $z = u + iv$. Seja $\mathrm{d}s^2 = E|\,\mathrm{d}z|^2$, a métrica de S (em parâmetros isotérmicos). Considere a *função de Hopf*

$$\varphi = \frac{l - n}{2} - im$$

   definida na lista anterior, onde l, m, n são os coeficientes da segunda forma fundamental (em parâmetros isotérmicos). Lembre-se que já sabemos que φ é holomorfa, pelo fato de que H =constante. Mostre que

$$|\varphi|^2 = E^2(H^2 - K) > 0$$

   Conclua que

i) A nova métrica $\mathrm{d}\widetilde{s}^2 := E\sqrt{H^2 - K}\,|\,\mathrm{d}z|^2$, é *completa* e conforme à métrica antiga $\mathrm{d}s^2$, de modo que o recobrimento conforme simplesmente conexo de ambas as superfícies de Riemann é a mesma superfície de Riemann simplesmente conexa (veja ref. 20).

ii) Mostre que a nova métrica é plana ("flat"), ou seja tem curvatura de Gauss $\widetilde{K}$ identicamente nula. Ou equivalentemente, $\log\widetilde{\lambda}$, onde $\widetilde{\lambda}^2 = E\sqrt{H^2 - K}$, é uma função harmônica.

Segue de um argumento standard da geometria conforme (veja ref. 14) ou do clássico teorema de Cartan da geometria Riemanniana, que o recobrimento simplesmente conexo de S é conformemente equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$ (Você saberia demonstrar isto ?)

iii) Mostre que a função $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ está globalmente definida em S, e é uma função subharmônica limitada superiormente. Levantando $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ ao recobrimento universal $\widetilde{S}$, conformemente equivalente à $\mathbb{C}$, obtemos pelo teorema de Liouville (veja ref. 15) que $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ deve ser constante. Conclua que K deve ser também constante, donde zero, ainda devido ao fato que $\widetilde{S}$, conformemente equivalente à $\mathbb{C}$. Agora é um resultado clássico da geometria diferencial que S deve ser o cilindro circular reto: Este teorema diz que *uma superfície completa de curvatura de Gauss identicamente nula diferente do plano, é um cilindro generalizado* (veja ref. 4). Logo, se além disso, possui curvatura média constante (não nula), é necessariamente o cilindro circular reto.

b) Suponha agora que $K \geqslant 0$ (e H =constante $\neq 0$). Por um bem conhecido teorema de Huber (veja ref. 11), uma superfície completa com $K \geqslant 0$ é ou bem compacta ou bem parabólica.

i) Mostre que se S é compacta segue do teorema de Gauss-Bonnet que S tem genus zero, e assim pelo teorema de Hopf (que demonstramos na lista anterior, veja também ref. 10) segue que S é uma esfera.

ii) Suponha S parabólica. Você será guiado para mostrar que neste caso S deve ser flat ($K \equiv 0$). Note que $\widetilde{\lambda}^4 = E^2(H^2 - K)$, não pode se anular identicamente, já que em caso contrário $K \equiv H^2$, e assim

S admitiria uma métrica completa de curvatura de Gauss constante positiva, o que é impossível desde que S é parabólica. Justifique esta dedução de várias outras maneiras ! Note que pela mesma razão de antes $\log \widetilde{\lambda}$, é harmônica. Mostre agora que $\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ é uma função subharmônica limitada superiormente. Conclua como antes que K é constante. Logo $K \equiv 0$, já que S é parabólica. Com isto a verificação do teorema está terminada. Você agora deve enunciar um teorema análogo ao teorema de Klotz-Osserman para superfícies no espaço hiperbólico e em seguida demonstrá-lo !!

4) Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ e seja N um campo de vetores normal (unitário) à S. A *superfície paralela* à S está definida por

$$S_t = S + tN$$

Você deve definir um conceito análogo no espaço hiperbólico.

a) Mostre que nos pontos regulares da superfície a curvatura média H_t e a curvatura de Gauss K_t de S_t são dadas por

$$H_t = \frac{H - Kt}{1 - 2Ht + Kt^2} \qquad K_t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2}$$

i) Assuma que H é uma constante positiva. Assuma também que M é completa com curvatura de Gauss K limitada. Mostre que as curvaturas média H_t e de Gauss K_t satisfazem a seguinte relação de *Weingarten*

$$2aH_t + K_t = b, \qquad a > 0, b \geqslant 0$$

para t suficientemente pequeno bem escolhido.

ii) Mostre ainda que quando $H = 0$ e $K >> -\infty$, M_t é imersa quando t é suficientemente pequeno. Dê um exemplo de um *fim* de uma superfície mínima tal que $K_t \to -\infty$, quando $\underset{p \in S_t}{\mathrm{p}} \to \partial S_t$.

iii) Finalmente mostre que, nas hipóteses do item i), M_t é uma *superfície especial de Weingarten* (veja refs. 16, 18, 19, 21), ou seja existe uma função de classe C^1, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que as curvaturas média e de Gauss satisfazem uma relação da forma

$$H_t = f(H_t^2 - K_t)$$

para f *elíptica*, i. e f satisfazendo

$$4t\left(f'(t)\right)^2 < 1.$$

Conclua também que dentro de uma mesma classe de superfícies especiais de Weingarten existe uma bem determinada superfície totalmente umbílica.

b) Considere uma superfície imersa S em $\mathbb{R}^3$ orientada por campo de vetores normal unitário N. Assuma que a curvatura média H é positiva e assuma que S satisfaz uma relação de Weingarten da forma

$$2aH + K = b, \qquad a > 0, b > 0$$

Que considerações e resultados análogos ao do item anterior você pode deduzir ?

Você deve fazer uma análise análoga para superfícies especiais no espaço hiperbólico, apresentando uma definição para superfícies especiais de Weingarten neste contexto.

5) Elabore um resumo sobre a aplicação exponencial e geodésicas: Seção 4-6 do livro do professor Manfredo (ref. 4).

6) Elabore um resumo sobre a rigidez da esfera: Seção 5-2 do livro texto.

7) Exercícios do livro do professor Manfredo (ref. 4): Seção 4-5: Exercs 1, 2, 3, 4.

Verifique com cuidados as propriedades geométricas estudadas nesta lista que são válidas para superfícies do espaço hiperbólico.

BIBLIOGRAFIA

1. João Lucas Marques Barbosa e Ricardo Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary, II.* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grénoble, **16**, 43-79, 1998.

2. João Lucas Barbosa e A. Gervásio Colares. *Minimal surfaces in R^3*. Monografias de matemática **40**, IMPA.

3. F. Braga Brito, W. Meeks III, H. Rosenberg e R. Sa Earp. *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve.* Indiana Univ. Math. J. **40**, 333-343, 1991.

4. Manfredo do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976 .

5. Celso Costa. *Funções algébricas e superfícies mínimas.* Notas do 18° Colóquio brasileiro de matemática, IMPA.

6. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

7. David Hoffman. *Surfaces of constant curvature in manifold of constant curvature.* J. Diff. Geom. **8**, 161-176, 1973.

8. David Hoffmann e Herman Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.* R. Ossermann (Ed.), Geometry V, Springer, 1997.

9. David Hoffman e William Meeks III. *Minimal surfaces based on the catenoid.* Am. Math. Mon. **97** (8), 702-730, 1990.

10. Heinz Hopf. *Differential Geometry in the large* . Lecture notes in mathematics, **1000**, Springer, 1989.

11. A. Huber. *On subharmonic functions and differential geometry in the large.* Comm. Math. Helv. **32**, 13-72, 1957.

12. K. Kenmotsu. *Lectures on deformable surfaces in* R^3. Preprint, 1995.

13. William Meeks III. *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature.* J. Diff. Geom. **16**, 161-177, 1981.

14. Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Dover Public. Inc, N. Y, 1986.

15. Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, 1967.

16. H. Rosenberg e R. Sa Earp. *The geometry of properly embedded special surfaces in* R^3*; e. g, surfaces satisfying* $aH + bK = 1$*, where* a *and* b *are positive.* Duke Math. J. **73** (2), 291-306, 1994.

17. Ricardo Sá Earp. *Uma fórmula do fluxo para superfícies compactas de curvatura média constante em* R^3 *com bordo planar.* Revista Unimar, **15** (3),

229-247, 1993.

18. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal.* Bol. Soc. Bras. Mat. **26** (2), 129-148, 1995.

19. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Classification des surfaces de type Delaunay.* Amer. J. Math. **121**, 671-700, 1999.

20. Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot, multimedia, 1997.

21. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Symmetry of properly embedded special Weingarten surfaces in H^3.* Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 4693-4711, 1999.

22. F. Pécastaings et J. Sevin. *Chemins vers la géométrie* . Mathématiques supérieures. Premier cycle universitaire. Vuibert, 1981.

23. Jorge Sotomaior e Carlos Gutierrez. *Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces.* Monografias del IMCA, 1998.

24. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* vol. 3, second edition. Publish or Perish, 1979.

25. J. J. Stoker. *Differential Geometry.* Academic Press, N. Y. , 1959.

26. Dirk Struik. *Lectures on classical differential geometry.* Addison-Wesley, 1950.

27. Paulo Ventura Araújo. *Geometria Diferential.* Coleção matemática universitária. CNpq-IMPA, 1998.

28. *Courbes Mathématiques.* Revue du Palais de la Découverte, No 45, 1995.