MAT1154 Equações Diferenciais e de Diferenças
Matéria Adicional
Período 2004.1

George Svetlichny

Sumário

1 O Método de Coeficientes Indeterminados para equações diferenciais de 1ª ordem

Considere uma equação linear de primeira ordem não homogênea

$$y' + a(x)y = h_1(x) + h_2(x)$$

onde o lado direito seja soma de dois termos. Podemos agora resolver separadamente as duas equações $y' + a(x)y = h_1(x)$ e $y' + a(x)y = h_2(x)$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções particulares das duas respectivas equações e $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Temos

$$y'(x) + a(x)y = [y_1(x) + y_2(x)]' + a(x)[y_1(x) + y_2(x)] =$$

$$[y_1'(x) + a(x)y_1(x)] + [y_2'(x) + a(x)y_2(x)] = h_1(x) + h_2(x) = h(x).$$

Em outras palavras: para achar uma solução particular de uma equação não homogênea quando o termo não homogêneo é soma de dois termos, basta achar uma solução particular para cada um dos termos em separado, e somar as duas soluções.

Obviamente esta regra se generaliza para o caso de um número maior de termos: $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x)$. Basta achar uma solução particular $y_k(x)$ para a equação com cada termo em separado $y' + a(x)y = h_k(x)$ e depois somar as soluções.

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$$

1.1 Termo kx^pe^{bx}

Considere agora o caso de coeficiente $a(x)$ ser uma constante a, e, primeiro, o caso do lado direito ser uma soma de termos de forma

$$h(x) = kx^pe^{bx}$$

onde k e b sao números reais e $p \geq 0$ um inteiro. Este caso inclui como casos particulares $h(x) = kx^p$ (quando $b = 0$), $h(x) = ke^{bx}$ (quando $p = 0$), e $h(x) = k$ (quando p e b ambos são zero). Para um termo deste tipo temos uma regra bastante útil para achar uma soluções particular.

A equação não homogênea

$$y' + ay = kx^pe^{bx}$$

possui uma solução particular de uma forma específica conforme dois casos:

1. Se $b \neq -a$, então
$$y(x) = q(x)e^{bx}$$
Onde $q(x)$ é um polinômio de grau p.

2. Se $b = -a$ então
$$y(x) = \frac{k}{p+1}x^{p+1}e^{bx}$$

Note que o caso (1) corresponde ao fator exponencial e^{bx} *não ser* uma solução da equação *homogênea* correspondente, e o caso (2) ao este fator *ser* uma solução.

Vamos ver alguns exemplos

Exemplo 1.1 $y' + 2y = 2x^2 + x$

Temos dois termos do lado direito para cada um dos quais $b = 0 \neq -2 = -a$. Cada um corresponde a uma solução particular que é um polinômio, de grau 2 para o primeiro, e de grau 1 para o segundo. Como a soma destes dois polinômios seria um polinômio de grau dois, podemos combinar os dois termos e procurar uma solução da forma $y(x) = a + bx + cx^2$. Substituindo isto na equação temos

$$b + 2cx + 2a + 2bx + 2cx^2 = 2x^2 + x$$

Para que isto seja verdade para todo x os coeficientes de 1, x, e x^2 dos dois lados devem ser iguais. Assim igualando

$$\begin{array}{lll} \text{Coeficiente de} & 1: & b + 2a = 0 \\ \text{Coeficiente de} & x: & 2c + 2b = 1 \\ \text{Coeficiente de} & x^2: & 2c = 2 \end{array}$$

Resolvendo este sistema achamos $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$,$c = 1$. Assim,

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + x^2$$

Exemplo 1.2 $y' + 2y = 3xe^{-2x}$

Aqui $b = -a$. Assim,
$$y(x) = \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$$

Exemplo 1.3 $y' - y = xe^{2x} + x^3e^x$

Temos dois termos do lado direito. Para o primeiro, já que $b = 2 \neq 1 = -a$, devemos procurar uma solução da forma $(a + bx)e^{2x}$ e para o segundo, já que $b = 1 = -a$, podemos escrever uma solução diretamente. Para o primeiro temos

$$be^{2x} + 2(a + bx)e^{2x} - (a + bx)e^{2x} = xe^{2x}$$

logo

$$b + a + bx = x$$

dai $b = 1$, $a = -1$, e

$$y_1(x) = -e^{2x} + xe^{2x}$$

Para o segundo termo temos diretamente

$$y_2(x) = \frac{1}{4}x^4 e^x$$

e portanto

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = -e^{2x} + xe^{2x} + \frac{1}{4}x^4 e^x$$

1.2 Termos $kx^p e^{bx}$ sen fx e $kx^p e^{bx}$ cos fx

Finalmente vamos consider o caso do coeficiente constante e o termo não homogêneo possuir um termo da forma:

$$kx^p e^{bx} \operatorname{sen} fx \qquad \text{ou} \qquad kx^p e^{bx} \cos fx$$

onde $f \neq 0$. No presente caso, a equação não homogênea

$$y' + ay = h(x)$$

onde $h(x)$ é uma das expressões acima, possui uma solução particular da forma

$$y(x) = q(x)e^{bx} \operatorname{sen} fx + r(x)e^{bx} \cos fx$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau p.

Exemplo 1.4 $y' + 2y = xe^x \cos 2x$

Tentemos $y(x) = (a + bx)e^x \operatorname{sen} 2x + (c + dx)e^x \cos 2x$. Achamos

$$\begin{aligned} y'(x) + 2y(x) = {} & be^x \operatorname{sen} 2x + (a + bx)e^x \operatorname{sen} 2x + 2(a + bx)e^x \cos 2x + \\ & de^x \cos 2x + (c + dx)e^x \cos 2x - 2(c + dx)e^x \operatorname{sen} 2x + \\ & 2(a + bx)e^x \operatorname{sen} 2x + 2(c + dx)e^x \cos 2x \end{aligned}$$

Isto deve ser igual a $xe^x \cos 2x$. Para simplificar, dividimos os dois lados por e^x e juntamos todos os termos com $\operatorname{sen} 2x$ e todos os termos com $\cos 2x$. Assim:

$$(b + 3a + 3bx - 2c - 2dx) \operatorname{sen} 2x + (2a + 2bx + d + 3c + 3dx) \cos 2x = x \cos 2x$$

Para que isto seja verdade para todo x é necessário, primeiro, que os coeficientes de $\operatorname{sen} 2x$ e os coeficientes de $\cos 2x$ dos dois lados sejam iguais:

$$\begin{aligned} b + 3a + 3bx - 2c - 2dx &= 0 \\ 2a + 2bx + d + 3c + 3dx &= x \end{aligned}$$

e, segundo, que em cada uma destas equações os coeficientes de 1 e os coeficientes de x dos dois lados sejam iguais. Assim finalmente

$$\begin{aligned} b + 3a - 2c &= 0 \\ 3b - 2d &= 0 \\ 2a + 3c + d &= 0 \\ 2b + 3d &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema achamos $a = -\frac{12}{169}$, $b = \frac{2}{13}$, $c = -\frac{5}{169}$, e $d = \frac{3}{13}$ e portanto

$$y(x) = (-\frac{12}{169} + \frac{2}{13}x)e^x \operatorname{sen} 2x + (-\frac{5}{169} + \frac{3}{13}x)e^x \cos 2x$$

2 Variação de Parâmetros para equações diferenciais de $2^{\underline{a}}$ ordem

Considere uma equação diferencial linear de segunda ordem:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x) \tag{1}$$

e sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação *homogênea*. A solução geral da equação homogênea é:

$$y(x) = cu(x) + dv(x)$$

onde c e d são constantes arbitrárias. O método de variação de parâmetros substitui *funções* no lugar destas constantes:

$$y(x) = c(x)u(x) + d(x)v(x) \tag{2}$$

Substituindo na Equação (1) obtemos, levando em conta que u e v são soluções da equação homogênea,

$$c''u + d''v + c'(2u' + au) + d'(2v' + av) = h. \tag{3}$$

Ora, isto é *uma* equação para *duas* funções incógnitas c e d. Para determinar estas funções unicamente precisamos de mais uma equação. Acontece que podemos arbitrar esta segunda equação de várias maneiras.

2.1 Dois coeficientes

Uma possível segunda equação é $c'u + d'v = 0$. Disto segue $c''u + c'u' + d''v + d'v' = 0$. Substituindo estas duas equações em (3) resulta em $c'u' + d'v' = h$, e temos o sistema:

$$\begin{aligned} c'u + d'v &= 0 \\ c'u' + d'v' &= h \end{aligned}$$

Introduzindo a *Wronskiana*

$$W(u, v) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} c' &= \frac{-vh}{W} \\ d' &= \frac{uh}{W} \end{aligned}$$

Integrando as duas equações para achar c e d e substituindo em (2) achamos uma solução particular da equação não homogênea:

$$y = -u \int \frac{vh}{W}\, dx + v \int \frac{uh}{W}\, dx$$

2.2 Um coeficiente

Uma outra maneira de impor uma segunda equação é anular uma das funções c ou d, digamos $d = 0$. Assim nem é necessário o conhecimento de duas soluções linearmente independentes, somente uma solução u é suficiente.

Equação (3) agora vira $c''u + c'(2u' + au) = h$ ou seja

$$c'' + (2\frac{u'}{u} + a)c' = \frac{h}{u}$$

o que é uma equação de primeira ordem linear em relação a *derivada*, c' de c. A solução é:

$$c' = C\frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx} + \frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\int e^{\int a\,dx} uh\, dx$$

onde C é uma constante arbitrária. Integrando mais uma vez temos:

$$c = C_1 + C_2 \int \frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\, dx + \int \left(\frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\int e^{\int a\,dx} uh\, dx\right) dx$$

e finalmente

$$y = C_1 u + C_2 u \int \frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\, dx + u \int \left(\frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\int e^{\int a\,dx} uh\, dx\right) dx$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias. Note que no segundo termo aparece uma segunda solução linearmente independente da equação homogênea,

$$v = u \int \frac{1}{u^2}e^{-\int a\,dx}\, dx$$

e que o terceiro termo é uma solução particular da equação não homogênea. Assim:

> *O método de variação de parâmetros com um coeficiente constrói, a partir de* uma *solução da equação homogênea, uma segunda solução linearmente independente, e uma solução particular da equação não homogênea.*

Vamos seguir os passos deste roteiro para a equação $y'' - 2y' + y = e^x$ utilizando a solução $u(x) = e^x$ da equação homogênea.

$$y(x) = c(x)e^x$$

Substituindo na equação não homogênea e mantendo somente termos onde c e diferenciada (os outros termos tem que somar a zero pois neles c e tratado como constante, e uma constante vezes e^x é solução da equação homogênea), temos $c''e^x + 2c'e^x - 2c'e^x = e^x$, ou seja

$$c'' = 1$$

Integrando

$$c(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 + C_2 x$$

e portanto

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

Concluímos que xe^x é uma segunda solução da equação homogênea, linearmente independente de e^x, e que $\frac{1}{2}x^2 e^x$ é uma solução particular da equação não homogênea.

3 O Método de Coeficientes Indeterminados para equações diferenciais de 2ª ordem

Considere uma equação linear não homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes.

$$y'' + ay' + by = h(x).$$

A equação característica associada é

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Com as mesmas considerações da Seção 1 procuramos uma solução particular para termos do lado direito de formas especiais.

3.1 Termo kx^pe^{bx}

A equação não homogênea

$$y'' + ay' + by = kx^pe^{cx}$$

possui uma solução particular de uma forma específica conforme três casos:

1. Se c não é raiz da equação característica, então

   $$y(x) = q(x)e^{cx}$$

   Onde $q(x)$ é um polinômio de grau p.

2. Se c é uma raiz *não repetida* da equação característica, então

   $$y(x) = q(x)e^{cx}$$

   Onde $q(x)$ é um polinômio de grau $p+1$ *sem termo constante*.

3. Se c é uma raiz *repetida* da equação característica,

   $$y(x) = \frac{k}{(p+1)(p+2)}x^{p+2}e^{bx}$$

Note que caso (1) corresponde ao fator e^{cx} não ser uma solução da equação homogênea, caso (2) corresponde ao fator e^{cx} ser uma solução mas xe^{cx} não o ser, e caso (3) a ambas estas funções o serem.

Exemplo 3.1 $y'' + y' - 2y = xe^x$

Aqui $c = 1$ que é uma raiz não repetida da equação característica. Portanto devemos pôr $y(x) = (ax + bx^2)e^x$. Substituindo na equação e simplificando temos $(2b + 3a + 6bx)e^x = xe^x$, dai $6b = 1$ e $2b + 3a = 0$ e assim

$$y(x) = (-\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}x^2)e^x$$

3.2 Termos kx^pe^{bx} sen fx e kx^pe^{bx} cos fx

Para o caso do termo não homogêneo ser da forma:

$$kx^pe^{cx} \operatorname{sen} fx \qquad \text{ou} \qquad kx^pe^{cx} \cos fx$$

onde $f \neq 0$, temos a seguinte construção: A equação não homogênea possui uma solução particular de uma forma específica conforme dois casos:

1. Se $c \pm if$ não são raízes complexas conjugadas da equação característica, então

   $$y(x) = q(x)e^{cx} \operatorname{sen} fx + r(x)e^{cx} \cos fx$$

   onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau p.

2. Se $c \pm if$ são raízes complexas conjugadas da equação característica, então

   $$y(x) = q(x)e^{cx} \operatorname{sen} fx + r(x)e^{cx} \cos fx$$

   onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau $p + 1$ *sem termo constante*.

Exemplo 3.2

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x} \operatorname{sen} x$$

Aqui $c \pm if = 2 \pm i$ que são raízes da equação característica. Assim pomos

$$y(x) = (ax^2 + bx)e^{2x} \operatorname{sen} x + (cx^2 + dx)e^{2x} \cos x$$

Substituindo na equação e simplificando temos

$$(-4cx + 2a - 2d)e^{2x} \operatorname{sen} x + (4ax + 2b + 2c)e^{2x} \cos x = xe^{2x} \operatorname{sen} x$$

Assim $-4c = 1$, $2a - 2d = 0$, $a = 0$, e $2b + 2c = 0$. Temos finalmente

$$y(x) = \frac{1}{4}xe^{2x} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}x^2e^{2x} \cos$$

Exemplo 3.3 $y'' + y' + y = \operatorname{sen} x$

Aqui estamos no primeiro caso e portanto $y(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$. Substituindo na equação resulta em $-b \operatorname{sen} x + a \cos x = \operatorname{sen} x$, logo

$$y(x) = -\cos x$$

4 Equações de diferenças: considerações gerais

Vamos estudar sequências de números reais $y_0, y_1, \ldots, y_\ell, \ldots$. Uma *equação de diferenças finitas de ordem* k para uma tal sequência é uma relação que se impõe sobre $k+1$ termos sucessivos da sequência

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0. \tag{4}$$

Uma *solução* de (4) é precisamente uma sequência para a qual (4) é verdade para todo n, isto é, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dizemos que uma equação de diferenças finitas de ordem k está em *forma normal* se é escrita como

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1}). \tag{5}$$

Se uma equação está em forma normal então em princípio é fácil achar as soluções. Considere (5) para os valores sucessivos $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} y_k &= f(0, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}) && (6)\\ y_{k+1} &= f(1, y_1, y_2, \ldots, y_k) && (7)\\ y_{k+2} &= f(2, y_2, y_3, \ldots, y_{k+1}) && (8)\\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que se $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ são dados arbitrariamente então (6) nos fornece o valor de y_k. Sabendo este valor, (7) nos fornece o valor de y_{k+1} e sabendo este, (8) nos fornece o valor de y_{k+2}, e assim por diante. Este processo, chamado de *iteração*, constrói uma solução da equação a partir dos números $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ aos quais podem ser atribuidos valores arbitrários.

Obviamente, para que o processo iterativo tenha êxito, o lado direito das equações (6), (7), (8),... deve ser bem definido. Para garantir isto vamos supor neste curso que f é bem definido para quaisquer valores dos seus argumentos. Note também que, uma vez dados os valores de $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, os passos iterativos determinam os números sucessívos $y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$ de maneira *única*. Uma outra maneira de expressar isto é o seguinte: se u e v são duas soluções e se os primeiros k valores coincidem, isto é, $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$,...,$u_{k-1} = v_{k-1}$, então $u = v$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Unicidade*.

A solução então depende de k constantes livres. Por exemplo, a equação $y_{n+2} = 1 + 2y_n + y_{n+1}$ tem como solução geral $y_n = -\frac{1}{2} + \alpha(-1)^n + \beta 2^n$, onde α e β são números quaisquer (verifique que esta expressão é uma solução).

O método iterativo não nos leva necessariamente a enxergar uma maneira compacta de expressar a solução geral, e em geral tal maneira compacta não existe. Para algumas equações importantes porém, a solução geral pode ser expressa em forma útil e explícita. São estas as equações que estudaremos neste curso. Para ilustrar, considere os primeiros passos iterativos na solução da presente equação :

$$\begin{aligned}
y_2 &= 1 + 2y_0 + y_1 \\
y_3 &= 1 + 2y_1 + y_2 &&= 2 + 2y_0 + 3y_1 \\
y_4 &= 1 + 2y_2 + y_3 &&= 5 + 6y_0 + 5y_1 \\
y_5 &= 1 + 2y_3 + y_4 &&= 10 + 10y_0 + 11y_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Não é nada claro a partir destes resultados que a solução geral possa ser dada por uma expressão simples.

5 Equações de diferenças de $1^{\underline{a}}$ ordem

5.1 A equação $y_{n+1} = y_n + f_n$

A equação

$$y_{n+1} = y_n + f_n \tag{9}$$

é análoga à equação diferencial $y' = f(x)$. Como esta última é resolvida por $y(x) = \int f(x)\,dx$, ou em termos de integrais definidas, por $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$, podemos esperar que a equação de diferenças finitas seja resolvida por uma soma dos f_n. De fato, desenvolvendo iterativamente os primeiros termos da solução temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f_0 \\ y_2 &= y_1 + f_1 = y_0 + f_0 + f_1 \\ y_3 &= y_2 + f_2 = y_0 + f_0 + f_1 + f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

a partir do qual percebemos que para $n \geq 1$,

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \tag{10}$$

Note que o somatório do lado direito de (10) não faz sentido para $n = 0$ pois então o limite superior é menor que o limite inferior. Adotamos porém no resto deste curso a convenção que um somatório com limite superior menor que o inferior vale zero. Com esta convenção, a expressão (10) é agora valida para todo n.

Que (10) dá uma solução pode ser facilmente verificado substituindo esta expressão na equação (faça-o!). Como y_0 é arbitrário, podemos também dizer que a solução geral de (5.1) é $c + \sum_{k=0}^{n-1} f_k$ onde c é uma constante arbitrária ("constante de soma"em analogia com uma constante de integração).

5.2 A equação $y_{n+1} = a_n y_n$

A equação

$$y_{n+1} = a_n y_n$$

é análoga à equação diferencial $y' = a(x)y$ (justifique esta afirmação). Desenvolvendo os primeiros termos iterativamente temos:

$$y_1 = y_0 a_0$$

$$\begin{array}{rcccl} y_2 & = & y_1 a_1 & = & y_0 a_0 a_1 \\ y_3 & = & y_2 a_2 & = & y_0 a_0 a_1 a_2 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

a partir do qual percebemos que para $n \geq 1$,

$$y_n = y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k. \tag{11}$$

Adotamos neste curso também a convenção que um produtório com limite superior menor que o inferior vale um. Com esta convenção, a expressão (11) é agora valida para todo n.

5.3 Equações lineares de 1ª ordem

Estamos agora prontos para resolver a equação

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n. \tag{12}$$

No restante desta sessão supomos que $a_n \neq 0$ para todo n, caso contrário, o tratamento da equação requereria considerações adicionais. A maioria das equações encontradas na prática são do tipo aqui assumido.

Se $b_n = 0$ então a equação é chamada homogénea. Por considerações gerais já discutidas, a solução geral de (12) é dada pela soma de uma solução particular e uma solução geral da equação homogénea correspondente. A equação homogénea é $y_{n+1} = a_n y_n$. Sabemos que a solução geral desta é

$$y_n = c \prod_{k=0}^{n-1} a_k, \tag{13}$$

onde c é uma constante arbitrária. Há dois métodos de resolver a equação não homogênea, o de variação de parâmetros, aplicável sempre, e o de coeficientes indeterminados, aplicável somente em certos casos (quando é bem mais eficiente do que o de variação de parâmetros).

5.4 O método de Variação de Parâmetros

Escreva

$$y_n = z_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

substituindo para a constante c em (13) a função (sequência) z_n. Para simplificar a notação seja

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k, \tag{14}$$

de modo que $y_n = z_n A_n$. Substituindo esta expressão em (12) temos

$$z_{n+1}A_{n+1} = a_n z_n A_n + b_n. \tag{15}$$

Usando o fato que $a_n A_n = A_{n+1}$ transformamos (15) em

$$z_{n+1} = z_n + \frac{b_n}{A_{n+1}}$$

do qual sabemos a solução geral

$$z_n = c + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{A_{k+1}},$$

e portanto a solução geral de (12) é dado por

$$y_n = cA_n + A_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{A_{k+1}} \tag{16}$$

onde c é uma constante arbitrária e A_n é dado por (14).

Um caso especial de (16) acontece quando os coeficientes da equação são constantes, i.e, $a_n \equiv a$. Neste caso, a solução dada por (16) pode ser escrita como

$$y_n = y_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k. \tag{17}$$

Se tivermos $b_n \equiv b$, então (17) pode ser ainda mais simplificada para

$$y_n = \begin{cases} y_0 a^n + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right], & a \neq 1 \\ y_0 + bn, & a = 1. \end{cases}$$

5.5 O método de Coeficientes Indeterminados

Apresentamos este método somente para o caso de $a_n = a$, uma constante. Como foi explicado antes, se o termo não homogêneo consiste de vários termos, podemos achar uma solução particular para cada termo em separado, e depois somar as soluções.

Consideramos somente o caso do b_n ser da forma:

$$b_n = kn^p b^n.$$

Este caso inclui como casos particulares $b_n = kn^p$ (quando $b = 1$), $b_n = kb^n$ (quando $p = 0$), e $b_n = k$ (quando $p = 0$ e $b = 1$). Para um termo deste tipo temos uma regra bastante útil para achar uma soluções particular.

A equação não homogênea

$$y_{n+1} = ay_n + kn^p b^n$$

possui uma solução particular da forma

$$y_n = q(n)b^n$$

onde $q(n)$ é um polinômio da seguinte forma:

1. Se $b \neq a$, $q(n)$ é de grau p.

2. Se $b = a$, $q(n)$ é de grau $p+1$, *sem termo constante*.

Note que o caso (1) corresponde ao fator exponencial b^n *não ser* uma solução da equação *homogênea* correspondente, e o caso (2) ao este fator *ser* uma solução.

Vamos ver alguns exemplos:

Exemplo 5.1 $y_{n+1} = 2y_n + n + n^2 2^n$

Vamos tratar os dois termos não homogêneos em separado. Para o primeiro termo, procuramos uma solução $w_n = a + bn$. Temos

$$w_{n+1} - 2w_n = (a + b(n+1)) - 2(a + bn) = b - a - bn$$

o que deve ser igual a n para qualquer valor de n. Logo os coeficientes de 1 e de n dos dois lados da igualdade $b - a - bn = n$ devem ser iguais e temos $a = -1$, $b = -1$ e portanto

$$w_n = -1 - n.$$

Para o segundo termo devemos procurar uma solução da forma

$$z_n = (an + bn^2 + cn^3)2^n.$$

Temos

$$z_{n+1} = (a(n+1) + b(n+1)^2 + c(n+1)^3)2^{n+1}.$$

Levando em conta que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ e expandindo cada potência de $(n+1)$ achamos

$$z_{n+1} = 2((a+b+c) + (a+2b+3c)n + (b+3c)n^2 + cn^3)2^n$$

e portanto calculando $z_{n+1} - 2z_n$ e dividindo os dois lados por 2^n devemos ter

$$2a + 2b + 2c + (4b+6c)n + 6cn^2 = n^2.$$

Assim sendo, para que isto valha para todo n, é necessário que

$$\begin{aligned} 2a + 2b + 2c &= 0 \\ 4b + 6c &= 0 \\ 6c &= 1 \end{aligned}$$

o que resulta em $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{4}$, e $c = \frac{1}{6}$ e portanto

$$z_n = (\frac{1}{12}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{6}n^3)2^n.$$

Finalmente

$$y_n = w_n + z_n = -1 - n + (\frac{1}{12}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{6}n^3)2^n$$

Exemplo 5.2 *Vamos achar a soma s_n dos quadrados dos primeiros n inteiros, isto é,*

$$s_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Vemos que s_n satisfaz $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$ com valor inicial $s_1 = 1$. Pela regra acima, já que $b = 1 = a$, devemos procurar uma solução particular da forma $an + bn^2 + cn^3$. Substituindo na equação resulta em

$$s_{n+1} - s_n = a + b + c + (2b+3c)n + 3cn^2 = 1 + 2n + n^2.$$

Disto deduzimos $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, e $c = \frac{1}{3}$. A solução geral da equação homogênea é $s_n = c$, uma constante, logo a solução geral da equação não homogênea é

$$s_n = c + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

Impondo a condição $s_1 = 1$ achamos $c = 0$ e portanto

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5.6 Um exemplo de aplicação: juros

Equações de diferenças de $1^{\underline{a}}$ ordem são usados na área financeira, especialmente no cálculo de juros, hipotecas e empréstimos.

A taxa de juros anunciada por uma instituição financeira é usualmente dada em forma de percentagem, por exemplo 2% ao mês. Para fazer cálculos devemos transformar isto num fator numérico real, que no nosso caso seria $0,02$. Usaremos a letra r para indicar este fator numérico. Note que a taxa de juros sempre é relativa a um determinado período de tempo (um dia, um mês, um semestre, um ano, etc.). Se pedimos emprestado uma quantia Q de reais a uma taxa r ao mês, então após um mês, devemos $(1+r)Q$ reais, após dois meses $(1+r)^2Q$ reais, e após N meses $(1+r)^NQ$ reais. Dizemos que os juros são *compostos*, isto é, se não saldamos a divida, no próximo período pagamos juros sobre os juros devidos no período atual. O mesmo mecanismo funciona para o nosso benefício com investimentos, no próximo período recebemos rendimentos em cima dos rendimentos do período atual.

Taxas de juros referentes a períodos de tamanhos diferentes podem ser convertidos entre si. Por exemplo se r_1 é a taxa de juros para um determinado período e r_2 e uma taxa equivalente para um período k vezes maior, $k = 2, 3, \dots$, então se pedimos emprestados Q reais, após k períodos devemos por uma conta $(1+r_1)^kQ$ reais, e por uma outra conta, $(1+r_2)Q$ reais. Então é necessário que

$$(1 + r_1)^k = (1 + r_2).$$

Mais geralmente, se r_1 e a taxa relativo a um período de tempo de tamanho T_1 e r_2 e a taxa equivalente relativo a um período de tempo de tamanho T_2, então

$$(1 + r_1)^{T_2} = (1 + r_2)^{T_1}.$$

Por exemplo, se r_m é a taxa mensal e r_a é a taxa anual equivalente, então $(1 + r_m)^{12} = 1 + r_a$.

Depósitos bancários, hipotecas, empréstimos, etc. são normalmente sujeitos a dois tipos de processos: intervenções periódicas (depósitos, saques, pagamentos, etc.) e incidência de juros. Suponha que no *início* de um certo período (o n-ésimo) de um certo tamanho (um mês, por exemplo) você tem uma quantia Q_n de dinheiro. Neste período a quantia é sujeita a juros com taxa r_n e no final sofre uma modificação p_n. Então no início do período $n+1$, a quantia em questão será $(1+r_n)Q_n+p_n$. Assim temos uma equação de diferenças de $1^{\underline{a}}$ ordem:

$$Q_{n+1} = (1 + r_n)Q_n + p_n.$$

Estudamos o caso mais simples desta equação, quando r_n, e p_n são constantes:

$$Q_{n+1} = (1+r)Q_n + p. \tag{18}$$

Esta é uma equação *linear, não homogênea* de $1^{\underline{a}}$ ordem. A solução geral da equação homogênea é $Q_n = C(1+r)^n$ onde C é uma constante arbitrária. Supomos que $r > 0$. Neste caso, pelo métodos de coeficientes indeterminados, sabemos que há uma solução particular constate $Q_n = K$. Substituímos isto na equação (18) achamos $K = -\frac{p}{r}$. Assim a solução geral de (18) é:

$$Q_n = C(1+r)^n - \frac{p}{r}$$

Exemplo 5.3 *Voce precisa de dinheiro e vai pedir um empréstimo bancário com juros de 2% ao mês. Quer saldar a sua dívida no final do sexto mês e o pagamento máximo mensal que aguenta é de R$500,00. Qual é a maior quantia que pode pedir emprestada?*

Temos $r = 0,02$ e $p = -500$. Quer $Q_7 = 0$ (no *início* do sétimo mês a sua dívida é saldada). Assim $0 = C(1,02)^7 + \frac{500}{0,02}$. Achamos $C \approx -21.764$ e portanto $Q_n \approx (-21.764)(1,02)^n + 25.000$ e $Q_1 \approx 2.800$. Assim a quantia maior que pode pedir emprestado é, R$2.800, e vai pagar um total de R$200 de juros.

Advertimos o leitor que há uma outra equação, usada por alguns, que descreve a mesma situação mas interpretada de uma maneira diferente, a saber $S_{n+1} = (1 + r_{n+1})(S_n + p_n)$. Agora S_n e a quantia no *final* do n-ésimo períodos e *antes* da modificação. Com $r_n = r$ e $p_n = p$ constantes, a solução geral é $S_n = C(1+r)^n - \frac{1+r}{r}p$. Para resolver o problema do exemplo anterior exigimos $S_6 = 500$, achamos $C \approx -22.200$ e $S_0 \approx 3.330$. Mas pela definição de S_0, esta quantia inclui o pagamento (fictício) de R$500,00 que faria antes do início do primeiro período. Assim a quantia maior que pode pedir emprestado é $S_0 - 500$, ou seja, R$2.800, e vai pagar um total de R$200 de juros.

As duas equações são equivalentes. A escolha de uma ou outra é questão puramente de gosto pessoal.

6 Equações de diferenças lineares de 2ª ordem

Considere a equação

$$y_{n+2} + a_n y_{n+1} + b_n y_n = g_n. \tag{19}$$

Supomos no resto desta seção que $b_n \neq 0$ para todo n. A maioria das equações encontrada na prática é deste tipo. O caso contrário requer considerações adicionais no seu tratamento.

Novamente, a solução geral de (19) é soma de uma solução particular com a solução geral da equação homogênea (quando $g_n = 0$ para todo n):

$$y_{n+2} + a_n y_{n+1} + b_n y_n = 0 \tag{20}$$

Equações de diferenças lineares homogêneas satisfazem o princípio de superposição, isto é, se u_n e v_n são duas soluções, e α e β são dois números quaisquer, então $y_n = \alpha u_n + \beta v_n$ também é solução.

Pelo que foi dito sobre equações de diferenças gerais, um solução y_n de uma equação de 2ª ordem é unicamente determinada pelos valores de y_0 e de y_1, que podem ser números quaisquer (teorema de existência e unicidade). Então, voltando à equação homogênea (20), existem soluções ϕ_n e ψ_n que satisfazem $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 0$ e $\psi_0 = 0, \psi_1 = 1$ respectivamente. Seja y_n uma solução qualquer e seja $w_n = y_0\phi_n + y_1\psi_n$. Pelo princípio de superposição w_n é uma solução. Conferimos que $y_0 = w_0$ e $y_1 = w_1$, portanto, pelo teorema de unicidade, temos $y_n = w_n$, ou seja

$$y_n = y_0\phi_n + y_1\psi_n.$$

Em outras palavras, *qualquer solução e combinação linear das duas soluções ϕ_n e ψ_n.* Mais geralmente se u_n e v_n são duas soluções *linearmente independentes* então a solução geral de (20) é

$$y_n = c_1 u_n + c_2 v_n$$

onde c_1 e c_2 são números quaisquer.

Desta forma a procura da solução geral se reduz à procura de duas soluções linearmente independentes. Embora saibamos que tais soluções sempre existem, não é possível em geral exibi-las por meio de expressões simples. Em alguns casos particulares importantes é porém possível fazê-lo. Antes de tratar alguns destes casos vamos supor que por algum meio nos é dado *uma* solução u e que além disto tivemos a grande sorte de ter $u_n \neq 0$ para todo n. Vamos procurar uma segunda solução linearmente independente. Usaremos o método de variação de parâmetros. Seja $y_n = z_n u_n$ e substituímos na equação:

$$z_{n+2}u_{n+2} + a_n z_{n+1}u_{n+1} + b_n z_n u_n = 0 \tag{21}$$

Seja $z_{n+1} - z_n = w_n$ e portanto $z_{n+1} = w_n + z_n$ e $z_{n+2} = w_{n+1} + z_{n+1} = w_{n+1} + w_n + z_n$. Com isto, (21) vira

$$(w_{n+1} + w_n + z_n)u_{n+2} + a_n(w_n + z_n)u_{n+1} + b_n z_n u_n = 0$$

mas os termos $z_n u_{n+2} + a_n z_n u_{n+1} + b_n z_n u_n = 0$ sendo que u_n é uma solução. A equação agora se reduz à:

$$(w_{n+1} + w_n)u_{n+2} + a_n w_n u_{n+1} = w_{n+1}u_{n+2} + w_n(u_{n+2} + a_n u_{n+1}) = 0.$$

Usando de novo o fato que u_n é uma solução temos $u_{n+2} + a_n u_{n+1} = -b_n u_n$ e portanto $w_{n+1}u_{n+2} - b_n u_n w_n = 0$ e a forma final da equação para w_n é:

$$w_{n+1} = \frac{b_n u_n}{u_{n+2}} w_n$$

cuja solução geral já sabemos é

$$w_n = c_2 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_k u_k}{u_{k+2}}$$

onde c_2 é um número qualquer. Para simplificar a notação seja

$$B_n = \prod_{k=0}^{n-1} b_k. \tag{22}$$

Assim

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_n u_n}{u_{n+2}} = B_n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} u_k}{\prod_{k=0}^{n-1} u_{k+2}} = B_n \frac{u_0 u_1 u_2 u_3 \cdots u_{n-1}}{u_2 u_3 \cdots u_{n-1} u_n u_{n+1}} = \frac{B_n}{u_n u_{n+1}}$$

ou seja,

$$w_n = \frac{B_n}{u_n u_{n+1}}.$$

Sendo agora $z_{n+1} - z_n = w_n$ temos

$$z_n = c_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{u_k u_{k+1}}$$

onde c_1 é um número qualquer. Finalmente

$$y_n = c_1 u_n + c_2 u_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{u_k u_{k+1}}.$$

Isto é uma solução geral da equação homogênea obtida a partir do conhecimento de uma solução particular. Colocando $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ obtemos uma solução linearmente independente da solução original u:

$$v_n = u_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{u_{k+1} u_k} \tag{23}$$

onde B_k é dado por (22).

O mesmo procedimento de variação de parâmetros pode ser usado para achar a solução geral de uma equação *não homogênea* a partir do conhecimento de uma solução da equação *homogênea*. Nestas notas porém, numa seção posterior, vamos resolver equações não homogêneas somente pelo método de coeficientes indeterminados.

6.1 Equações lineares com coeficientes constantes

Se na seção anterior pusermos $a_n = a$ e $b_n = b \neq 0$ temos uma *equação com coeficientes constantes*:

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = g_n. \tag{24}$$

Vamos primeiro procurar uma solução da forma $y_n = \xi^n$ par algum número $\xi \neq 0$ da equação *homogênea*:

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0. \tag{25}$$

Substituindo em (25) temos:

$$\xi^{n+2} + a\xi^{n+1} + b\xi^n = 0.$$

Como $\xi \neq 0$ podemos dividir por ξ^n e obter:

$$\xi^2 + a\xi + b = 0. \tag{26}$$

Assim para cada raiz da equação quadrática (26) temos em princípio uma solução da equação de diferenças finitas . Há três casos a estudar:

1. Há duas raízes reais distintas: r_1, r_2, $r_1 \neq r_2$

2. Há duas raízes complexas conjugadas: $p \pm iq$.

3. Há uma raiz real r de multiplicidade dois.

No caso (1) temos duas soluções linearmente independentes $u_n = r_1^n$ e $v_n = r_2^n$ de modo que a solução geral é:

$$y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

No caso (2) temos duas soluções *complexas* linearmente independentes, $(p+iq)^n$ e $(p-iq)^n$. Estamos porém procurando soluções *reais*. Podemos usar o fato da equação ser linear de modo que combinações lineares de soluções complexas com coeficientes complexas, também são soluções. Assim podemos tomar a parte real e a parte imagináira de $(p+iq)^n$ para conseguir duas soluções reais:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(p+iq)^n &= \frac{(p+iq)^n + (p-iq)^n}{2}, \\ \mathrm{Im}\,(p+iq)^n &= \frac{(p+iq)^n - (p-iq)^n}{2i}.\end{aligned}$$

Há expressões equivalentes que na maioria dos casos são mais convenientes. Escrevemos a raiz $p + iq$ na *forma polar*

$$p + iq = re^{i\theta}$$

onde

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \theta = \arctan \frac{q}{p}.$$

Agora,

$$(p+iq)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Finalmente, usando $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(p+iq)^n &= r^n \cos n\theta, \\ \mathrm{Im}(p+iq)^n &= r^n \operatorname{sen} n\theta,\end{aligned}$$

de modo que no caso (2) a solução geral da equação de diferenças finitas é

$$y_n = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \operatorname{sen} n\theta,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

No caso (3) temos somente *uma* solução r^n e devemos então procurar uma outra solução linearmente independente para formar uma base para o espaço de soluções. Estamos porém na situação da seção anterior onde a partir de uma solução que nunca se anula construímos uma outra. Como (26) tem raiz r repetida, sabemos que esta equação é

$$\xi^2 - 2r\xi + r^2 = 0$$

portanto $a = -2r$ e $b = r^2$ Podemos agora utilizar a formula (23). Temos $B_k = r^{2k}$ logo

$$\frac{B_k}{u_{k+1}u_k} = \frac{r^{2k}}{r^{2k+1}} = r^{-1}$$

Assim

$$v_n = u_n \sum_{k=0}^{n-1} r^{-1} = r^n n r^{-1} = n r^{n-1}.$$

Como um múltiplo de uma solução também é solução, multiplicamos v_n por r, obtendo nr^n. Logo no caso (3), a solução geral é

$$y_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

onde c_1 e c_2 são números arbitrários.

Resumindo os resultados temos a seguinte tabela:

Natureza das Raízes	*Raízes*	*Solução geral*
Reais distintas	r_1, r_2	$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
Complexas conjugadas	$re^{\pm i\theta}$	$c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \,\mathrm{sen}\, n\theta$
Real repetida	r	$c_1 r^n + c_2 n r^n$

6.2 O Método de Coeficientes Indeterminados

Vamos analisar primeiro o caso do termo não homogêneo g_n em (24) ser um polinômio em n Podemos procurar uma solução *particular* da mesma forma. Seja

$$g_n = p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + \cdots + p_2 n^2 + p_1 n + p_0 \tag{27}$$

com $p_k \neq 0$ um polinômio de grau k. Suponha agora que

$$y_n = q_k n^k + q_{k-1} n^{k-1} + \cdots + q_2 n^2 + q_1 n + q_0 \tag{28}$$

seja da mesma forma que o termo não homogêneo. A equação (24) agora transforma-se num sistema de equações lineares para os coeficientes $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ o qual na maioria dos casos tem solução.

Os casos em que este sistema não tem uma solução correspondem às equações para o qual 1 seja uma raiz do polinômio (26) correspondente. No caso desta raiz não ser repetida, y_n pode ser achada tomando um polinômio de grau $k+1$ com $q_0 = 0$, e no caso da raiz 1 repetida, podemos achar y_n tomando um polinômio de grau $k+2$ com $q_1 = q_0 = 0$. Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 6.1

$$y_{n+2} - y_{n+1} + 3y_n = n^2 - 2n + 1 \tag{29}$$

Substituindo $y_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ no lado esquerdo de (29) e simplificando, obtemos a seguinte equação .

$$3\alpha n^2 + (2\alpha + 3\beta)n + (3\alpha + \beta + 3\gamma) = n^2 - 2n + 1$$

Igualando os coeficientes de n^2, n, e 1 dos dois lados, resulta no sistema

$$\begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 2\alpha + 3\beta &= -2 \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma &= 1. \end{aligned}$$

A solução deste sistema é $\alpha = 1/3$, $\beta = -8/9$, e $\gamma = 8/27$ de modo que uma solução particular da equação (29) é

$$y_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{8}{9}n + \frac{8}{27}$$

Exemplo 6.2

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n = 2n - 1 \tag{30}$$

Neste exemplo 1 é uma raiz não repetida do polinômio (26). Ao tentar uma solução de (30) da forma $y_n = \alpha n + \beta$ chegamos à equação $5\alpha = 2n - 1$ o que é impossível satisfazer para todo n. Conforme o que foi dito acima devemos procurar uma solução da forma $y_n = \alpha n^2 + \beta n$. Isto dá lugar a $10\alpha n + (7\alpha + 5\beta) = 2n - 1$ o que é satisfeito para todo n com $\alpha = 1/5$ e $\beta = -12/25$ de modo que uma solução particular de (30) é

$$y_n = \frac{1}{5}n^2 - \frac{12}{25}n.$$

Exemplo 6.3

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n + 1 \tag{31}$$

Neste exemplo 1 é uma raiz *repetida* do polinômio (26). Ao tentar uma solução do tipo $y_n = \alpha n + \beta$ deduzimos que $0 = n + 1$ o que obviamente é absurdo. Ao tentar uma solução de segundo grau em n, isto é $y_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ chegamos a um outro absurdo, $2\alpha = n + 1$. Conforme o que foi dito acima devemos procurar uma solução da forma $y_n = \alpha n^3 + \beta n^2$ o que leva a $6\alpha n + (6\alpha + 2\beta) = n + 1$ o que é satisfeito para todo n com $\alpha = 1/6$ e $\beta = 0$ de modo que uma solução particular de (31) é

$$y_n = \frac{1}{6}n^3.$$

A regra para o caso mais geral do termo não homogêneo ser da forma

$$kn^p b^n$$

é que para este termo existe uma solução particular

$$y_n = q(n)b^n$$

onde $q(n)$ é um polinômio da seguinte forma:

1. Se b não é raiz de (26), $q(n)$ tem grau p.
2. Se b é uma raiz *não repetida* de (26), $q(n)$ tem grau $p + 1$ sem termo constante.
3. Se b é uma raiz *repetida* de (26), $q(n)$ tem grau $p + 2$ sem termo constante e sem termo linear.

Note que caso (1) corresponde ao fator b^n não ser uma solução da equação homogênea, caso (2) corresponde ao fator b^n ser uma solução mas nb^n não o ser, e caso (3) a ambas estas funções o serem.

Exemplo 6.4

$$y_{n+2} - y_n = n2^n$$

Neste caso 2 não é raiz de $\lambda^2 - 1 = 0$, portanto existe uma solução particular da forma $(\alpha + \beta n)2^n$. Substituindo na equação temos

$$(\alpha + b\beta(n + 2))2^{n+2} - (\alpha + \beta n)2^n = n2^n.$$

Podemos dividir por 2^n o que dá $4(\alpha+2\beta+\beta n)-(\alpha+\beta n)=n$. Resolvendo temos $\alpha=-\frac{8}{9}$ e $\beta=\frac{1}{3}$. Portanto

$$y_n = \left(-\frac{8}{9}+\frac{1}{3}n\right)2^n$$

Exemplo 6.5

$$y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = n2^n$$

Neste caso 2 é raiz não repetida de $\lambda^2-3\lambda+2=0$, portanto existe uma solução particular da forma $(\alpha n+\beta n^2)2^n$. Deixamos a determinação de α e β ao leitor.

Exemplo 6.6

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n = n2^n$$

Neste caso 2 é raiz repetida de $\lambda^2-4\lambda+4=0$, portanto existe uma solução particular da forma $(\alpha n^2+\beta n^3)2^n$. Deixamos a determinação de α e β ao leitor.

7 Cálculo funcional de matrizes

Seja A uma matriz $d \times d$. O cálculo funcional associa a cada função f (de uma classe bastante geral) uma "função da matriz" $f(A)$ que é um nova matriz $d \times d$. Por exemplo e^A, $\operatorname{sen} A$, $\ln A$, etc.

Se f é um polinômio

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

então $f(A)$ é naturalmente dado por

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A z^{n-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A z + a_0 I,$$

onde I é a matriz identidade $d \times d$. Note que a uma função constante $f(z) = c$ associa-se a matriz cI.

Com o cálculo funcional (descrito em baixo) funções da matriz A comportam-se como se A fosse um número. Em particular temos as seguintes propriedades:

1. Se $h(z) = f(z) + g(z)$, então $h(A) = f(A) + g(A)$.
2. Se $h(z) = f(z)g(z)$, então $h(A) = f(A)g(A)$.
3. Se $h(z) = f(g(z))$, então $h(A) = f(g(A))$.
4. Se $h(z) = \lim_{x \to a} f(z, x)$ ou $h(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ então correspondentemente $h(A) = \lim_{x \to a} f(A, x)$ e $h(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$

Por exemplo, vamos ter as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(A) + \cos^2(A) &= I, \\ e^{\ln A} &= A, \\ \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= A e^{tA}, \\ \lim_{n \to \infty} (I + \frac{A}{n})^n &= e^A, \end{aligned}$$

já que temos as identidades $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $e^{\ln z} = z$, $\lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)z} - e^{tz}}{h} = z e^{tz}$, e $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$. Note que em particular, a terceira identidade significa que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}. \tag{32}$$

7.1 O procedimento

O procedimento para calcular $f(A)$ é o seguinte:

1. Procure um polinômio $q(z)$ tal que $q(A) = 0$. Pelo Teorema de Cayley podemos sempre usar o polinômio característico de A, isto é $q(z) = \det(zI - A)$ que tem grau d. Se porventura sabemos de um polinômio de grau menor que d, este seria uma escolha melhor pois resultará em menos contas a fazer.

2. Calcule as raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de q, junto com as respectivas multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Isto quer dizer que
$$q(z) = c(z - \lambda_1)^{m_1}(z - \lambda_2)^{m_2} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}$$
onde c é uma constante. Para o polinômio característico, os λ_i são os autovalores de A, mas é preciso também contar quantas vezes (m_i) cada um é repetido.

3. Procure um polinômio p de grau igual ao grau de q *menos* 1 tal que para cada raiz λ_i vale
$$\begin{array}{rcl} p(\lambda_1) & = & f(\lambda_i) \\ p'(\lambda_1) & = & f'(\lambda_i) \\ p''(\lambda_1) & = & f''(\lambda_i) \\ \vdots & & \vdots \\ p^{(m_i-1)}(\lambda_1) & = & f^{(m_i-1)}(\lambda_i). \end{array}$$
Note que cada autovalor impõe m_i condições, e portanto o número total de equações é $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \mathrm{grau}\, q$ que é exatamente o número de coeficientes de p, e portanto p é determinado unicamente.

4. Finalmente, $f(A)$ é simplesmente $p(A)$.

Exemplo 7.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são -1 e 2. O polinômio p é linear $p(z) = az + b$. Então para achar A^{500} é necessário que

$$\begin{array}{rcl} p(-1) = -a + b & = & (-1)^{500} = 1 \\ p(2) = 2a + b & = & 2^{500}. \end{array}$$

Disto achamos $a = \frac{2^{500}-1}{3}$ e $b = \frac{2^{500}+2}{3}$ e portanto

$$A^{500} = \frac{2^{500}-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2^{500}+2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{501}+1 & 2^{5001}-2 \\ 2^{500}-1 & 2^{500}+2 \end{pmatrix}$$

Para uma função f arbitrária temos

$$\begin{aligned} p(-1) = -a + b &= f(-1) \\ p(2) = 2a + b &= f(2) \end{aligned}$$

e achamos

$$f(A) = \frac{f(2) - f(-1)}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{f(2) + 2f(-1)}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em particular para $\cos \pi A$ temos $\cos 2\pi = 1$ e $\cos(-\pi) = -1$ e portanto

$$\cos \pi A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aqui A tem um autovalor 3 repetido. Com $p(z) = az + b$, para calcular $f(A)$ é preciso que

$$\begin{aligned} p(3) = 3a + b &= f(3) \\ p'(3) = a &= f'(3) \end{aligned}$$

Assim $b = f(3) - 3f'(3)$ e

$$f(A) = f'(3)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + (f(3) - 3f'(3))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(3) & f'(3) \\ 0 & f(3) \end{pmatrix}$$

Em particular,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \quad \ln A = \begin{pmatrix} \ln 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

7.2 Resolvendo $u_{n+1} = Au_n$ e $v' = Av$

Vamos resolver os problemas discreto e contínuo

$$\begin{array}{cc} u_{n+1} = Au_n, & v'(t) = Av(t), \\ u_0 \text{ dado} & v(0) \text{ dado} \end{array}$$

onde A é uma matriz $d \times d$ fixa e u e v são vetores com d coordenadas. Abstratamente, pelo menos, as soluções são fáceis de escrever:

$$u_n = A^n u_0 \quad \text{e} \quad v(t) = e^{tA} v(0).$$

Que este u_n é solução do problema discreto, é imediato. Que este $v(t)$ é solução da equação diferencial segue de (32). É necessário então poder calcular A^n que é $f(A)$ para $f(z) = z^n$, e e^{tA} que é $f(A)$ para $f(z) = e^{tz}$.

Exemplo 7.3 *Considere a equação $u_{n+1} = Au_n$ onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz são 1 e 2. Procuramos um polinômio $p(z) = az + b$ tal que $p(1) = a + b = 1^n = 1$ e $p(2) = 2a + b = 2^n$. Achamos $a = 2^n - 1$ e $b = 2 - 2^n$, logo

$$A^n = (2^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2 - 2^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

e

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} u_0$$

Exemplo 7.4 *Considere a equação $v'(t) = Av(t)$ onde*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são: $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $m_2 = 2$. Vamos calcular e^{tA}. Temos $f(z) = e^{tz}$ e procuramos um polinômio quadrático $p(z) = az^2 + bz + c$. As condições são:

$$\begin{aligned} p(0) = c &= f(0) = 1 \\ p'(0) = b &= f'(0) = t \\ p(1) = a + b + c &= f(1) = e^t \end{aligned}$$

Achamos $a = e^t - t - 1$, $b = t$, e $c = 1$. Assim:

$$e^{tA} = (e^t - t - 1)A^2 + tA + I \quad \text{e} \quad v(t) = e^{tA} v(0).$$

7.3 1º atalho: matrizes diagonalizáveis

Se a matriz for diagonalizável, não é necessário levar em conta a multiplicidade dos autovalores. Assim o procedimento seria:

1. Calcule os autovalores *distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$;

2. Procure um polinômio p de grau $k-1$ tal que

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k) = f(\lambda_k)$$

3. De novo $f(A) = p(A)$.

Aliás, matrizes simétricas são diagonalizáveis, assim como matrizes com todos seus autovalores diferentes entre si.

Exemplo 7.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

Os autovalores são 1 e 15 (confira: qual é o autovalor duplo?). Como A é simétrica, é diagonalizável. Para calcular A^{1000}, procure um polinômio linear levando 1 a $1^{1000} = 1$ e 15 a 15^{1000}. Temos:

$$p(z) = \frac{15^{1000} - 1}{14} z + \frac{15 - 15^{1000}}{14}.$$

e

$$A^{1000} = p(A) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 2\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 5\alpha + \beta & 6\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha & 10\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

onde

$$\alpha = \frac{15^{1000} - 1}{14}, \quad \beta = \frac{15 - 15^{1000}}{14}.$$

Note que se tivéssemos seguido a receita principal teríamos que achar um polinômio de grau dois enquanto no presente caso um de primeiro grau é suficiente.

7.4 2º atalho: polinômio minimal

O polinômio minimal de A e o polinômio $q(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ de menor grau tal que $q(A) = 0$. Nos casos do polinômio minimal ser conhecido e ter grau menor que d é mais eficiente usar as raízes de q com as suas multiplicidades do que usar o polinômio característico. Alias, o primeiro atalho é um caso particular deste pois o polinômio minimal de uma matriz diagonalizável é $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores distintos.

Exemplo 7.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

O polinômio minimal é $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Para calcular e^{tA} devemos achar um polinômio de grau dois $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(1) = e^t$, $p'(1) = te^t$ e $p(2) = e^{2t}$. Uma conta revela:

$$\begin{aligned} a &= e^{2t} - e^t(t+1) \\ b &= e^t(3t+2) - 2e^{2t} \\ c &= e^{2t} - 2te^t \end{aligned}$$

e assim $e^{tA} = aA^2 + bA + cI$.

8 Autovetores de matrizes 2×2 (atalhos)

Para achar os autovetores de uma matriz, é necessário primeiro achar as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, e depois para cada raiz λ achar uma base para as soluções do sistema

$$(A - \lambda I)v = 0. \tag{33}$$

Para matrizes 2×2 não há necessidade de resolver sistemas, pois as soluções podem ser determinados de uma maneira bem mais rápida.

Seja A uma matriz 2×2. O polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) \tag{34}$$

Exemplo 8.1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Temos

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Podemos ver a verdade de (34) fazendo a conta simples

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

No caso do Exemplo (8.1) os autovalores então são -1 e 2.

Note que Equação (33) diz que v é ortogonal a cada linha de $A - \lambda I$. Ora, se (a, b) é um vetor no plano, então $(-b, a)$ (ou $(b, -a)$) é um vetor ortogonal. Portanto temos o seguinte atalho:

> *Para calcular um autovetor de uma matriz A 2×2, correspondente a um autovalor λ, calcule $A - \lambda I$, escolha uma linha não nula, troque as componentes e o sinal de um deles.*

Para a matriz do Exemplo (8.1) consider o autovalor -1. Temos

$$A + 1I = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo um autovetor correspondente é $(5, -5)$. Já que qualquer múltiplo de um autovetor também é autovetor podemos escolher $(1, -1)$.

Se a matriz tem um outro autovalor diferente, podemos usar o mesmo método, mas aqui temos outro atalho:[1]

[1] Este atalho for descoberto, durante a aula, por Bianca Santori, ex-aluna da Matemática da PUC.

Um autovetor correspondente ao outro autovalor de A, se este existir, é qualquer coluna não nula *de $A - \lambda I$.*

No nosso exemplo então um autovetor que corresponde ao autovalor 2 seria $(5, -2)$.

Exemplo 8.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$. Temos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

portanto $v_1 = (\sqrt{3}, -1)$ e $v_2 = (\sqrt{3}, 1)$ são autovetores correspondentes.

Para entender porque o segundo atalho funciona, sejam λ_1 e λ_2 dois autovalores distintos da matriz A 2×2. O polinômio característico de A é $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ e portanto $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$ mas esta equação diz que cada coluna de $(A - \lambda_2 I)$ é anulada por $(A - \lambda_1 I)$, ou seja, cada tal coluna que seja não nula, é autovetor de A com autovalor λ_1.

9 Frações Parciais

Por *frações parciais* entende-se um método de reescrever a recíproca de um produto de polinômios em termos de uma soma de razões de polinômios, o que é muito útil em vários tipos de conta. O fato principal é o seguinte:

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ polinômios que *não possuem raízes em comum*, isto é, uma raiz de qualquer um dos polinômios não é raiz de nenhum dos outros. Então é possível escrever, de uma maneira única,

$$\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \cdots + \frac{q_n}{p_n} \tag{35}$$

onde cada q_j é um polinômio cujo grau é *menor* que o grau de p_j.

Não vamos demonstrar esta afirmação, so ilustrar com alguns exemplos:

Exemplo 9.1

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$$

Aqui $p_1(x) = x$ *com raiz* 0, $p_2(x) = x - 1$ *com raiz* 1, *e* $p_3(x) = x + 2$ *com raiz* -2. *Estes polinômios não têm raízes em comum, logo*

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \tag{36}$$

para alguns números A, B, *e* C.

Para achar estes números combinamos os três termos do lado direito de (36) utilizando um denominador comum.

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Para que isto seja verdade para todo x é necessário que

$$A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) = 1 \tag{37}$$

Há várias maneiras de resolver (37) para os números A, B, e C. A primeira, é igualar os coeficientes de cada potência de x dos dois lados. Isto dá:

$$\begin{array}{ll} \text{Coef. de } x^2: & A + B + C = 0 \\ \text{Coef. de } x: & A + 2B - C = 0 \\ \text{Coef. de } 1: & -2A = 1 \end{array}$$

A solução deste sistema é $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{6}$.

Isto demonstra que, de fato, os números A, B, e C existem tal que (37) é verdadeira para todo x, mas este procedimento não é de longe o método mais eficiente de achá-los. O método mais rápido é substituir em (37) cada uma das raízes dos polinômios em questão. Estas raízes são 0, 1, e -2. Substituindo $x = 0$ obtemos $-2A = 1$ ou seja $A = -\frac{1}{2}$, substituindo $x = 1$ obtemos $3B = 1$, ou seja, $B = \frac{1}{3}$, e substituindo $x = -2$ obtemos $6C = 1$ ou seja $C = \frac{1}{6}$. Note que ao substituir uma raiz, somente um dos três termos é diferente de zero e portanto o coeficiente desejado A, B, ou C é determinado imediatamente. Assim temos

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{x+2}$$

Exemplo 9.2

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-4x+4)}$$

Aqui $p_1 = x+1$ *com raiz* -1, *e* $p_2 = x^2+4x+4$ *com raiz* 2 repetida.

Temos

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-4x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+4}$$

e dai a equação

$$A(x^2-4x+4) + (Bx+C)(x+1) = 1$$

Substituindo $x = -1$ temos $9A = 1$ ou seja $A = \frac{1}{9}$, substituindo $x = 2$ temos $6B + 3C = 1$. Com isto não temos equações suficientes para achar os três números pois uma das raízes é repetida. Para conseguir mais uma equação podemos ou substituir um outro número qualquer na equação, ou recorrer a igualar coeficientes de potência de x dos dois lados. Igualando as potências de x^2 temos $A+B = 0$. Logo $B = -\frac{1}{9}$ e finalmente de $6B+3C = 1$ concluímos que $C = \frac{5}{9}$. Assim

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-4x+4)} = \frac{1}{9}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{9}\frac{x-5}{x^2-4x+4}$$

Exemplo 9.3

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-4x+3)}$$

Aqui $p_1(x) = x - 1$ *tem raiz* 1 *e* $p_2(x) = x^2 - 4x + 3$ *tem raízes* 1 *e* 3. *Neste caso os dois polinômios tem raízes em comum e é* impossível *escrever*

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-4x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+3} \quad \textit{(Impossível!)}$$

(tente fazer e descubra a contradição).

Para proceder neste caso escrevemos $(x-1)(x^2-3x+2) = (x-1)^2(x-3)$ e portanto

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-4x+3)} = \frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3}$$

o que implica $(Ax+B)(x-3)+C(x-1)^2 = 1$. Com $x = 1$ temos $-2(A+B) = 1$, com $x = 3$ temos $4C = 1$ e igualando os coeficientes de x^2 temos $A+C = 0$. A solução é $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, e $C = \frac{1}{4}$ e portanto

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-4x+3)} = \frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = -\frac{1}{4}\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-3}$$

É um fato que qualquer expressão da forma

$$\frac{q(x)}{(x-r)^p}$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau menor que p pode ser escrito na forma alternativa

$$\frac{q(x)}{(x-r)^p} = \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \frac{A_3}{(x-r)^3} + \cdots + \frac{A_{p-1}}{(x-r)^{p-1}} + \frac{A_p}{(x-r)^p}$$

onde os A_i são *constantes*. Portanto temos alternativamente

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Procedendo como antes achamos

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-3}.$$

Como último exemplo considere

Exemplo 9.4

$$\frac{1}{x(x^2-2x+5)}$$

aqui $p_1 = x$ *com raiz* 0 *e* $p_2 = x^2 - 2x + 5$ *com raízes* complexas $1 \pm 2i$.

Temos
$$\frac{1}{x(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$
e portanto $A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)x = 1$. Com $x = 0$ achamos $5A = 1$ com $x = 1 + 2i$ achamos $(B(1 + 2i) + C)(1 + 2i) = 1$. Para que isto seja verdade, a parte real e imaginária dos dois lados têm que ser iguais (B e C são números reais). Isto resulta em $-3B + C = 1$ e $4B + 2C = 0$ cuja solução é: $B = -\frac{1}{5}$ e $C = \frac{2}{5}$. Finalmente

$$\frac{1}{x(x^2-2x+5)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\frac{x-2}{x^2-2x+5}$$