# Equações diferenciais e de diferenças
# MAT 1154 — 2009.1
# Lista

1. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

(a) Calcule $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots$.

(b) Use o item anterior para determinar $a_k$.

**Solução:** (a) Temos

$$\begin{aligned} \frac{y - a_0}{x} &= a_1 + a_2 x + \cdots + a_{k+1} x^k + \cdots \\ \frac{y - a_0 - a_1 x}{x^2} &= a_2 + a_3 x + \cdots + a_{k+2} x^k + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{y - a_0 - a_1 x}{x^2} - 5\frac{y - a_0}{x} + 6y &= (a_2 - 5a_1 + 6a_0) + (a_3 - 5a_2 + 6a_1)x + \cdots \\ &\quad + (a_{k+2} - 5a_{k+1} + 6a_k)x^k + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $(y - x)/x^2 - 5y/x + 6y = 0$ e

$$y = \frac{x}{6x^2 - 5x + 1}$$

(b) Escrevendo $y$ em frações parciais temos

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x - 1/2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x - 1/3}.$$

Como

$$\frac{1}{x - a} = -a^{-1} - a^{-2}x - a^{-3}x^2 - \cdots - a^{-k-1}x^k - \cdots$$

temos

$$y = (1 - 1) + (3 - 2)x + (3^2 - 2^2)x^2 + \cdots + (3^k - 2^k)x^k + \cdots$$

e portanto $a_k = 3^k - 2^k$.

2. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$a_{k+2} = \frac{2a_{k+1} - a_k}{k+1}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

(a) Calcule $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$.

(b) Calcule $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$.

(c) Calcule $a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k + \cdots$.

**Solução:** (a) Reescreva a equação como $k a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} = 0$. Temos

$$\begin{aligned} xy &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^k + \cdots \\ \frac{y}{x} &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_{k+1} x^k + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (k+1) a_{k+1} x^k + \cdots \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} - 2y + xy &= 0 + (a_2 - 2a_1 + a_0)x + \\ &\quad + (2a_3 - 2a_2 + a_1)x^2 + \cdots + \\ &\quad + (k a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1})x^k + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \left( \frac{1}{x} + 2 - x \right) dx \\ \ln(y) &= \ln(x) + 2x - x^2/2 + C \\ y &= \tilde{C}\ x\ \exp(2x - x^2/2) \end{aligned}$$

A condição $a_1 = y'(0) = 1$ garante que $y = x\ \exp(2x - x^2/2)$.

(b) Temos $y(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \exp(3/2)$.

(c) Temos $y' = (1 + 2x - x^2)\exp(2x - x^2/2)$ e portanto
$y'(1) = a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k + \cdots = 2\exp(3/2)$.