TEORIA DO CONTROLE E SIMULAÇÃO FÍSICA

Aluno: Erick Talarico
Orientador: Thomas Lewiner

Introdução

A motivação para essa iniciação cientifica veio do trabalho de Jos Stam em controle de simulação de fluídos [1], com o objetivo de melhorar a base cientifica do aluno pelo aprendizado de uma forte ferramenta teórica, a teoria do controle, junto com uma aplicação em simulação científica.

A teoria do controle

A teoria do controle é vastamente utilizada em engenharia e com possíveis aplicações importantes em outras áreas da ciência. A teoria do controle serve para o estudo de sistemas regidos por equações diferenciais, sobre as quais temos influencia através de alguns parâmetros escolhidos. Isso se traduz na equação diferencial por ter, alem das variáveis de estado, parâmetros que podemos controlar a cada instante.

Essa teoria é assim uma formalização de fenômenos influenciados por forcas externas. Por exemplo, o vôo de um avião depende em parte da sua aerodinâmica, e em parte das direções que damos ao leme e do aileron.

Simulação física

A simulação de fluidos é hoje em dia um desafio, pois envolve as equações de Navier-Stokes que ainda não foram resolvidas devido a não-linearidade delas. Por isso, são geralmente estudadas no contexto de simulação em computadores, ou seja, num domínio discreto.

Seguindo [1], a idéia da nossa simulação é conseguir obrigar o fluido a seguir um comportamento que não ocorreria normalmente sem perder o seu caráter fluído. Isto é útil na indústria de entretenimento para criar "monstros de água" ou outros fenômenos para instigar nossa imaginação.

A última parte do projeto foi então criar uma força fictícia nas equações de Navier-Stokes, criando um exemplo pratico da teoria do controle.

Formulação matemática

A formulação usual de um problema de controle é:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t, x(t), u(t)),\\
&x(.) \in C^{0}([0;t_{1}];R^{n})\\
&x(0) \in T_{0};\ x(t_{1}) \in T_{1}\\
&u(.) \in U_{ad} = \{L^{1}([0;t_{1}];R^{m}) / \forall t, u(t) \in \Omega(t)\}\\
&\min J(u)
\end{aligned}
$$

As últimas equações são condições de contorno sobre o estado *x(t)* e restrições sobre o controle *u(t)*. A primeira equação é a equação diferencial, no caso, a equação de Navier-Stokes para a velocidade do fluido:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \vec{V}.\nabla(x) + \upsilon.\Delta(x) + f_{ext} - \frac{\nabla(p)}{\rho}$$

A não linearidade encontra-se no termo advectivo $\vec{V}.\nabla(x)$, o qual exprime que características do fluido tendem a ser transportadas pelo campo de velocidades do fluido.

A primeira pergunta que surge é: existem controles que satisfazem as restrições e tornem solucionável a equação diferencial com as condições de contorno especificadas? Esse problema é chamado de *controlabilidade*. O *conjunto controlável* é o conjunto de condições iniciais para as quais tais controles existem.

Depois surge a duvida mais pratica: qual controle iremos utilizar? Isso, em geral, é resolvido através de um critério de preferência, o que é expresso matematicamente pela minimização do *funcional de custo* J(u). No problema da simulação do fluido, Jos Stam aconselha utilizar como custo a soma da norma das variáveis de controle, i.e. uma forma de penalizar controles muito intensos, que tenderiam a tirar o aspecto suave do fluido, e a norma da discrepância entre a simulação e o resultado desejado, para premiar os controles que fazem a simulação chegar mais perto de seus objetivos. Esse funcional de custo é quadrático, e isso tem conseqüências na busca do controle ótimo, ou seja, do controle que minimiza o custo.

Resultados e Conclusões

Esse é o básico teórico. Uma abordagem mais analítica requer um estudo das condições de existência ou unicidade do controle ótimo que não é factível no estado da arte em matemática.

Usamos discretização sobre uma grade regular para resolver o problema de controle do fluido, aproximando os operadores diferenciais (laplaciano, gradiente, etc.) na equação diferencial de Navier-Stokes por matrizes que relacionam os voxels vizinhos da grade.

A simulação é computacionalmente pesada e numericamente instável, e enfrentamos problemas para ter resultados satisfatórios, embora a tentativa já seja enriquecedora.

Referências

1 - McNamara A., Treuille A., Popović Z., Stam J. Fluids control using the adjoint method, **Siggraph** 2004. *Paper motivador da iniciação cientifica.*

2 - STAM J., Stable Fluids. **Siggraph** 1999. *Paper consagrado de Jos Stam, onde ele usa técnicas implícitas para tornar o problema discreto estável. É interessante, pois dá as diretrizes para se simular os fluidos no computador.*

3 - Macki J.W.; Strauss A. Introduction to optimal Control Theory. **Springer** 1982. *Uma visão inicial da teoria do controle de uma forma mais geometrica e, portanto, mais tangível para alunos de graduação, embora sempre o primeiro contato com a teoria do controle seja sempre um pouco estranho.*

4 - Leitão, A. Cálculo Variacional e controle ótimo. **IMPA**. *Uma abordagem diferente da teoria do controle, se comparado com o livro anterior, pois foca no problema do controle ótimo e usa uma linguagem de calculo variacional.*

5 - Bordignon A, Tavares G.. Navier Stokes em GPU. **PUC-Rio.** *Muito interessante pois deduz a equação de Navier Stokes e fala um pouco sobre a implementação computacional da simulação dos fluidos.*

6 - Thürey N., Keiser R., Pauly M., Rüde U. Detail-preserving fluid control. **SGP** 2006. *Uma abordagem alternativa e menos fisicamente correta, sem uso de Navier Stokes.*

7 - Harlow F., Welch E. Numerical Calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. **Physical Fluids** 2004. *Apesar de não usar explicitamente Navier Stokes utilize a abordagem de Euler para simular fluidos.*