MAT1154
ANÁLISE QUALITATIVA DE PONTOS DE EQUILÍBRIO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

VERSÃO 1.0.2

Resumo. Este texto resume e complementa alguns assuntos dos Capítulo 9 do Boyce–DiPrima.

1. Sistemas autônomos de 1ª ordem

Um *sistema de EDO's de 1ª ordem de dimensão* n é um sistema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, \ldots, x_n, t) \end{cases}$$

Uma *solução* do sistema é um conjunto de funções $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ que satisfaz identicamente as equações acima. Impostas condições iniciais $x_1(t_0) = a_1, \ldots, x_n(t_0) = a_n$ fica determinada uma única solução (salvo em casos patológicos raros).

O sistema é chamado *autônomo* se as funções $F_1, \ldots, F_n$ acima não dependem da variável t. Neste caso o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

Observação 1. Uma propriedade dos sistemas autônomos é a seguinte: se $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é solução, então a *translação temporal* $(x_1(t - t_0), \ldots, x_n(t - t_0))$ também é solução.

Observação 2. Um sistema de EDO's autônomo ou não e de ordem qualquer pode ser reduzido a um sistema autônomo de 1ª ordem através da introdução de variáveis extras – veja exemplos em uma planilha de Maple.

Os sistemas autônomos de 1ª ordem têm a vantagem de poder ser representados geometricamente (pelo menos em dimensões até 3) através de campos de vetores – veja exemplos em uma planilha de Maple.

Date: 25 de Maio de 2011.

2. Pontos de equilíbrio: alguns tipos especiais

Em toda esta seção vamos considerar um sistema autônomo geral da forma (1).

Dizemos que a lista de valores $(a_1, \ldots, a_n)$ é um *ponto de equilíbrio*[1] do sistema se as funções constantes

$$x_1(t) = a_1, \quad , x_2(t) = a_2, \quad , \ldots, \quad x_n(t) = a_n$$

formam uma solução do sistema. Isto é equivalente a pedir que

$$\begin{cases} F_1(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ \ldots \\ F_n(a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{cases}$$

Suponha que $(a_1, \ldots, a_n)$ é um ponto de equilíbrio, e $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é uma solução do sistema. Dizemos que *a solução converge ao ponto de equilíbrio no futuro* se

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = a_1, \quad , \ldots, \quad \lim_{t\to+\infty} x_n(t) = a_n.$$

Dizemos que *a solução converge ao ponto de equilíbrio no passado* se

$$\lim_{t\to-\infty} x_1(t) = a_1, \quad , \ldots, \quad \lim_{t\to-\infty} x_n(t) = a_n.$$

Observação 3. É claro que se uma solução converge no futuro ou no passado a um ponto (com coordenadas finitas) então este ponto deve ser de equilíbrio...

Vamos definir alguns tipos especiais de pontos de equilíbrio:

1. ponto de equilíbrio tipo *atrator*[2];
2. ponto de equilíbrio tipo *repulsor*[3];
3. ponto de equilíbrio tipo *sela*;
4. ponto de equilíbrio tipo *centro*.

Advertência: nem todo ponto de equilíbrio se enquadra em um desses tipos; porém na maioria dos exemplo práticos caímos em um desses casos.

2.1. Atratores e repulsores.

Um ponto de equilíbrio $(a_1, \ldots, a_n)$ será chamado *atrator* se a seguinte situação ocorrer: para todo ponto $(b_1, \ldots, b_n)$ suficientemente próximo de $(a_1, \ldots, a_n)$ a solução $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ do sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = b_1$, $\ldots$, $x_n(0) = b_n$ converge ao ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ no *futuro*.

Um ponto de equilíbrio é chamado repulsor se vale a condição análoga trocando "futuro" por "passado".

Exemplo 1. Pêndulo com atrito – ver planilha de Maple; ver também pág. 388, 398–399 do Boyce–DiPrima.

Os pontos da forma $(0, k\pi)$ com k inteiro par são atratores. Isso é fácil de justificar fisicamente.

---

[1] Boyce–DiPrima chamam isto de *ponto crítico*.

[2] também chamado *assintoticamente estável* ou *poço*

[3] também chamado *fonte*

Observação 4. Um ponto de equilíbrio atrator pode ser do "tipo espiral" ou não... Não nos preocuparemos com esta distinção.

Observação 5. Dado um ponto de equilíbrio atrator a, o conjunto das condições iniciais cujas soluções convergem para o a no futuro é chamado *bacia de atração* do ponto a. Veja um exemplo na página 399 do livro.

2.2. **Selas.** O conceito de *sela* é um pouco mais complicado e será dado apenas apenas em dimensão $n = 2$.

Um ponto de equilíbrio $a = (a_1, a_2)$ é chamado *sela* se a seguinte situação ocorrer: existem duas curvas γ_1, γ_2 no plano $x_1 x_2$ que se intersectam[4] transversalmente (isto é, formando ângulo não-nulo) no ponto a tais que:

- toda solução do sistema que passa por um ponto de γ_1 converge a a no futuro (e reciprocamente, se uma solução converge a a no futuro então ela passa por γ_1);
- toda solução do sistema que passa por um ponto de γ_2 converge a a no passado (e reciprocamente, se uma solução converge a a no passado então ela passa por γ_2).

Exemplo 2. Pêndulo com atrito – ver planilha de Maple; ver também pág. 388, 398–399 do Boyce–DiPrima.

Os pontos da forma $(0, k\pi)$ com k inteiro ímpar são selas. Isso é fácil de justificar fisicamente.

2.3. **Centros.** Lembre que uma função $f(t)$ é chamada *periódica* se existe uma constante $T > 0$ (chamada período) tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo t. (Note que o período não é único: $2T$, $3T$, ... também são períodos).

Uma solução $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ de um sistema de EDO's será chamada de *periódica* se todas as funções $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ são periódicas e têm um período comum T,

Os pontos de equilíbrio do tipo centro só são definidos em dimensão 2.

Um ponto de equilíbrio (a_1, a_2) será chamado de tipo *centro* se a seguinte situação ocorrer: para todo ponto (b_1, b_2) suficientemente próximo de (a_1, a_2) a solução $(x_1(t), x_2(t))$ do sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = b_1$, ..., $x_n(0) = b_n$ é *periódica* (mas não constante).

Exemplo 3. Pêndulo *sem* atrito – ver planilha de Maple; ver também pág. 388.

Os pontos da forma $(0, k\pi)$ com k inteiro par são centros. Isso é fácil de justificar fisicamente (conservação da energia).

Advertência: Os períodos das diversas soluções *não* são os mesmos.[5] A maneira mais simples de ver isso é considerar uma solução que parte da condição inicial $(\alpha, 0)$ onde α é menor mas muuuuito próximo a π, e ver que o período desta solução será grande. Uma fórmula geral para o período é dada no Exerc. 29 do § 3.3 do B–DiP.

3. Determinando o tipo de um ponto de equilíbrio

Revisar o caso linear.

---

[4]Intersectar: Ter interseção não-vazia; cruzar. (Do inglês *intersect*).

[5]Dizemos que o pêndulo sem atrito não é *isócrono*. Já o sistema massa-mola sem atrito é isócrono.

Suponha que $(a_1, \ldots, a_n)$ é um ponto de equilíbrio de um sistema autônomo da forma (1).

3.1. **Usando a matriz jacobiana: Atratores, repulsores e selas.**

Uma maneira de tentar determinar o tipo do ponto de equilíbrio é usando a chamada *matriz jacobiana* do sistema nesse ponto:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) \end{pmatrix}$$

Teorema. *Suponha que J é a matriz jacobiana do sistema* (1) *em um ponto de equilíbrio fixado. Então*

1. *Se todos os autovalores de J têm* parte real negativa *então o ponto de equilíbrio é* atrator*.*
2. *Se todos os autovalores de J têm* parte real positiva *então o ponto de equilíbrio é* repulsor*.*
3. *Supondo que a dimensão n é* 2*, se um autovalor de J for negativo e o outro for positivo então o ponto de equilíbrio é* sela*.*

**Pseudo-explicação: dominância da parte linear. . . **

Se algum autovalor tiver parte real zero (isto é, for zero ou imaginário puro) então a determinação do tipo de equilíbrio é mais delicada e depende de outras informações que não apenas a matriz J.

Observação 6. Uma maneira útil de descobrir se estamos em algum dos casos do teorema sem necessariamente calcular os autovalores é a seguinte:

- Calcule o determinante de J; se for negativo então necessariamente um autovalor é positivo e o outro é negativo (e pelo Teorema o ponto é *sela*).
- Se o determinante for positivo então calcule o traço de J. Aí:
  - Se o traço é negativo então necessariamente os autovalores têm ambos parte real negativa (e pelo Teorema o ponto é *atrator*).
  - Se o traço é positivo então necessariamente os autovalores têm ambos parte real positiva (e pelo Teorema o ponto é *repulsor*).

Exercício: Prove que isto está correto!

Exemplo 4. Resolver os exercícios do § 9.3 do B–DiP.

Exemplo 5. Espécies em competição: § 9.4 do B–DiP.

3.2. **Centros.**

Se os autovalores de J são imaginários puros então o ponto e equilíbrio tem *chance* de ser centro. . . Porém isso depende de outras coisas.

Vamos considerar o sistema da forma (1) com $n = 2$; para simplificar a escrita, vamos trocar x_1, x_2, F_1, F_2 por x, y, F, G, respectivamente, de modo que o sistema fica:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\
\\
\frac{dy}{dt} &= G(x,y)
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$

Seja $(x(t), y(t))$ uma solução fixada do sistema acima. Suponha que, por muita *sorte*, podemos isolar t em função de x; aí substituindo na expressão de y temos y como função de x. Neste caso, a função $y = y(x)$ será solução da seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

Essa EDO pode ser reescrita como:

$$G(x,y) - F(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Lembre (da matéria da P1) que a equação acima é chamada *exata* se

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial(-F)}{\partial x}. \tag{3}$$

Nesse caso, podemos encontrar[6] uma função $\Phi(x,y)$ tal que

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= G \\
\\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -F
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

e as soluções da EDO serão dadas em forma implícita como $\Phi(x,y) = c$. As trajetórias das soluções do sistema (2) ficam contidas nas curvas de nível da função Φ.

Esta discussão serve para motivar o seguinte resultado geral:

Teorema. *Se uma função $\Phi(x,y)$ satisfaz as relações* (4) *então a trajetória de qualquer solução do sistema* (2) *ficam contidas em uma curva de nível da função Φ.*

Em outras palavras, a quantidade $\Phi(x,y)$ é *conservada.* Dizemos que encontramos uma *lei de conservação* do sistema.

Demonstração. Regra da cadeia ... □

Exemplo 6. Pág. 391 (final § 9.2) do B–DiP.

Exemplo 7. Pêndulo sem atrito:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y \\
\\
\frac{dy}{dt} &= -\omega^2 \sin x
\end{aligned}
\right.
$$

[6] localmente

O ponto $(0,0)$ é de equilíbrio, e os autovalores da jacobiana são imaginários puros; este é um caso onde o Teorema anterior não consegue decidir o tipo do ponto de equilíbrio. Porém, já tínhamos visto de considerações físicas que o ponto de equilíbrio era do tipo centro.

Note que o sistemas passa no teste (3): $0 = 0$. Fazendo as contas, conseguimos encontrar uma função conservada $\Phi(x, y) = \omega^2 \cos x + \frac{y^2}{2}$. Obs: Esta função nada mais é do que um múltiplo da energia total (potencial + cinética).

Parece claro que se um ponto é do tipo centro então deve haver uma quantidade[7] conservada. Assim, estabelecemos a seguinte:

Regra. *Suponha que:*

- *a matriz jacobiana do sistema em um ponto de equilíbrio tem autovalores imaginários puros;*
- *o sistema tem uma lei de conservação.*

Então o ponto de equilíbrio é do tipo centro.

Exemplo 8. Sistema predador–presa: § 9.5 do B–DiP.

Observação 7. A existência de ponto de equilíbrio do tipo sela não impede a existência de uma lei de conservação. (Isto pode ser visto no exemplo do pêndulo sem atrito.)

Porém dado um ponto de equilíbrio atrator ou repulsor, não pode existir nenhuma lei de conservação não-trivial. (Mais precisamente, qualquer função conservada será constante ao redor do ponto de equilíbrio.)

Observação 8. É possível que o sistema tenha uma lei de conservação mesmo falhando o teste (3) (veja os exemplo no final do § 2.6 do B–DiP). O que acontece é que se o sistema passar no teste (3) então uma lei de conservação existe e é fácil de ser encontrada.

[7] não-constante