MAT1154
EXPONENCIAL DE MATRIZES E APLICAÇÕES A SISTEMAS LINEARES DE EDO'S

VERSÃO 1.3.2

RESUMO. A exponencial de matrizes permite um tratamento unificado dos sistemas de equações diferenciais lineares, sem cair em inúmeros casos. Explicamos também maneiras rápidas de calculá-la (o chamado Cálculo Funcional). Este texto complementa o Cap. 7 do Boyce–DiPrima (especialmente a Seç. 7.7).

Observação 1. As partes marcadas com $\star$ ajudam a entender melhor o porquê das coisas, porém são mais difíceis. Estas partes são dirigidas aos alunos mais curiosos ou que querem maximizar o CR (em resumo, os mais nerds).

1. A exponencial de uma matriz quadrada

1.1. **Definição.** Lembremos que a função exponencial é dada pela seguinte série de potências (série de Taylor):

$$\exp x = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

A exponencial de uma matriz quadrada ($n \times n$) é definida de forma parecida:

$$\exp A = e^A = \mathrm{Id} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Aqui Id é a matriz identidade $n \times n$. Note que a fórmula faz sentido (isto é, não estamos tentando fazer nada absurdo do tipo somar matrizes de tamanhos diferentes etc.) É possível demonstrar que a série sempre converge, mas não temos conhecimento técnico para fazer isso aqui.

Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

O mesmo tipo de conta mostra que, mais geralmente, a exponencial de uma matriz *diagonal* 2×2 é dada por:

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Date: 24 de Maio de 2011.

(Vale algo análogo para matrizes $n \times n$.)

Exemplo 2. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculando as potências de A, encontramos um padrão. [Faça isso.] Aí temos:

$$\begin{aligned}
\exp A &= \mathrm{Id} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -5^2 & 0 \\ 0 & -5^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 5^3 \\ -5^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{5^2}{2!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots & -5 + \frac{5^3}{3!} + \cdots \\ 5 - \frac{5^3}{3!} + \cdots & 1 - \frac{5^2}{2!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 5 & -\sin 5 \\ \sin 5 & \cos 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos as séries de Taylor das funções co-seno e seno:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

Uma conta análoga à feita acima mostra que, mais geralmente:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(esta é uma matriz de rotação).}$$

Exercício 1. Mostre a partir da definição que

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \mu e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Exercício 2 ($\star$)**.** Googleie "hyperbolic functions" (ou consulte seu livro de cálculo). Mostre a partir da definição de matriz exponencial que:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

Para matrizes em geral, não é muito prático tentar calcular a exponencial a partir da definição. Veremos mais tarde maneiras eficientes de fazer essa conta.

1.2. **Algumas propriedades.** A propriedade mais útil da exponencial é a seguinte:

Teorema 1.

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

(t é um escalar, e ponto indica multiplicação de matrizes).

Demonstração. [1]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Id} + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \frac{t^4A^4}{4!} + \cdots\right)\\
&= 0 + A + \frac{2tA^2}{2!} + \frac{3t^2A^3}{3!} + \frac{3t^3A^4}{4!} + \cdots\\
&= A + \frac{tA^2}{1!} + \frac{t^2A^3}{2!} + \frac{t^3A^4}{3!} + \cdots\\
&= A\left(\mathrm{Id} + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots\right) \text{ ou } \left(\mathrm{Id} + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots\right)A\\
&= A\cdot e^{tA} \text{ ou } e^{tA}\cdot A\,.\end{aligned}$$

□

Observação 2. O Teorema 1 no contexto da exponencial usual ("escalar") evidentemente também vale e é uma propriedade familiar e importante. Porém, aqui vai uma advertência: Nem toda propriedade da função exponencial usual vale para a exponencial matricial. Por exemplo, *não é verdade que* $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$*, em geral!*

Exercício 3 ($\star$)**.** Encontre um contra-exemplo. – Talvez seja melhor deixar para fazer este exercício depois que você aprender métodos mais eficientes de calcular exponencial de matrizes.
Dica: Uma explicação do "paradoxo" é a seguinte': Se A e B são tais que $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ então as matrizes e^A e e^B *comutam*, pois e^{A+B} certamente é igual a e^{B+A}. Mas "geralmente" duas matrizes não comutam... [2]

Outra propriedade interessante e que nos será útil em breve é a seguinte:

Teorema 2. *Se λ é um autovalor da matriz A então e^λ é um autovalor da matriz e^A.*

Demonstração. Exercício ($\star$): basta usar as definições e fazer umas contas. □

Corolário 3 ($\star$)**.** $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Demonstração. O determinante de uma matriz é o produto dos autovalores, e o traço é a soma... □

2. Aplicação a equações diferenciais

2.1. Sistemas homogêneos.

Vimos que sistemas lineares (com coeficientes constantes) homogêneos de EDO's podem ser escritos na forma:

$$Y'(t) = A\cdot Y(t).$$

Aqui $Y(t)$ é um vetor-coluna que depende de t, e A é uma matriz quadrada fixa (constante).

[1] Esta prova é um pouco trapaceira, pois falta justificar porque é válido derivar uma série termo a termo. Não temos condições de dar essa justificativa aqui.

[2] Na verdade, é possível mostrar que se A e B comutam então vale a fórmula $e^{A+B} = e^A\cdot e^B$. Mais ainda ($\star\star$): existe uma fórmula geral (correta) que dá a diferença entre e^{A+B} e $e^A\cdot e^B$ em função da "não-comutatividade" entre A e B – googleie "Baker Campbell Hausdorff".

Usando exponencial de matrizes, poderemos encontrar as soluções dessa equação de maneira unificada (que não depende dos autovalores etc). Antes de ver isso, lembremos o que acontece quando as matrizes são todas 1×1, i.e. números: a solução geral da EDO $y'(t) = ay(t)$ é $y(t) = ce^{at}$. Além disso, $c = y(0)$.

Teorema 4. *A solução do PVI*

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

é

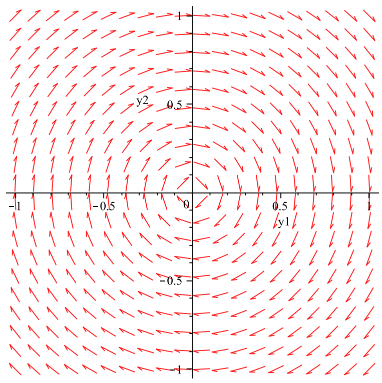
$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 \,.$$

A matriz e^{tA} é chamada *matriz fundamental* do sistema de EDO's (veja Boyce–DiPrima, Seção 7.7).[3]

Exemplo 3. Considere o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y(t)\,.$$

O campo de direções é o seguinte:



A exponencial da matriz $tA = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ foi calculada no Exemplo 2. Assim, pelo Teorema 4, a solução geral é

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Lembrando que o efeito da matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é uma rotação de ângulo θ (no sentido anti-horário), vemos que as soluções do sistema de EDO's ficam rodando em círculos (no sentido horário), com frequência angular 1. Você pode comprovar isto usando o comando de MAPLE:

```
> with(DEtools): DEplot({diff(y1(t),t)=y2(t), diff(y2(t),t)=-y1(t)},
> [y1(t),y2(t)], t=0..2*Pi, y1=-1..1, y2=-1..1, [[y1(0)=.8, y2(0)=0]],
> animatecurves=true);
```

[3]Como explicado lá, é útil enxergar $M(t) = e^{tA}$ como solução do PVI $M'(t) = A \cdot M(t)$, $M(0) = \mathrm{Id}$.

Observação 3. Vimos em aula através de exemplos que vale a seguinte regra: Se uma matriz A tem todos os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ com parte real negativa então a origem é um ponto de equilíbrio atrator da EDO $Y'(t) = A \cdot Y(t)$. Isso acontece porque nesse caso *a matriz* e^{tA} *tende a zero quando* $t \to +\infty$. De fato, pelo Teorema 2 os autovalores de e^{tA} são $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}$, os quais tendem a zero quando $t \to +\infty$.[4]

Observação 4 ($\star$). O que acontece para coeficientes não-constantes? Lembre que a solução do PVI

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

é $y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right)$. Baseado nisso, poderíamos chutar que a solução do PVI

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t) \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

é $Y(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\, ds\right) \cdot Y_0$. Porém, isso é *falso*![5]

Exercício 4 ($\star\star$). Encontre um contra-exemplo.
Dica: Note que se a fórmula fosse verdadeira teríamos uma certa propriedade de comutatividade na família de matrizes $A(t)$...

Exercício 5 ($\star$). Suponha que todas as soluções do sistema $Y' = AY$ satisfazem $Y(1) = -Y(0)/5$. Determine os autovalores de A.

Resposta: $-\ln 5 \pm k\pi i$, onde k é um inteiro ímpar.

Observação 5 ($\star$ Relação com o Wronskiano). Considere uma EDO linear homogênea de 2ª ordem:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Se $y_1(t)$, $y_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções então o *Wronskiano* desse conjunto é definido como

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vejamos a relação do Wronskiano com a matriz exponencial. A equação (1) pode ser escrita como um sistema de 1ª ordem, introduzindo-se uma variável $z = y'$:

$$Y' = AY, \quad \text{onde} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Trataremos apenas do caso em que a matriz A é constante (isto é, p e q constantes). Dado o conjunto fundamental de soluções $\{y_1(t), y_2(t)\}$, note que, pelo Teorema 4,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot C, \quad \text{onde} \quad C = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Tomando o determinante dos dois lados, e usando uma propriedade do determinante e o Corolário 3, temos

$$W(t) = \det(e^{tA} \cdot C) = (\det C)(\det e^{tA}) = ce^{\operatorname{tr}(tA)} = ce^{-pt}.$$

[4] Na verdade, ter autovalores indo para zero não garante que a matriz está indo para zero: afinal de contas, existem matrizes não-nulas que têm todos os autovalores nulos. Uma maneira correta de de justificar a afirmação $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0$ seria usar o Cálculo Funcional que veremos a seguir.

[5] Ainda é verdade que existe uma "matriz fundamental" $\Phi(t)$ (independente da condição inicial Y_0) tal que a solução do PVI é dada por $Y(t) = \Phi(t) \cdot Y_0$; porém não há fórmula geral simples para $\Phi(t)$. Exercício ($\star\star$): prove isso.

Este é o Teorema de Abel (ver pág. 117 do Boyce–DiPrima) no caso de coeficientes p, q constantes.

Exercício 6 ($\star\star$)**.** Estenda as considerações acima sobre o Wronskiano para o caso de coeficientes não-constantes. (Cuidado: Não cometa o erra aludido na Observação 4.)

2.2. **Sistemas não-homogêneos.** Vejamos agora sistemas lineares não-homogêneos (ainda com coeficientes constantes). Em forma matricial:

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + B(t),$$

onde $B(t)$ é um vetor-coluna dado que depende de t. Veremos que é esse tipo de sistema sempre pode ser resolvido, desde que sejamos capazes de calcular exponencial e matrizes e certas integrais.

A ideia é a mesma usada para EDOs unidimensionais: encontrar um *fator integrante* – no caso, matricial. Reescremos a EDO como

$$Y'(t) - A \cdot Y(t) = B(t).$$

Multiplicamos à esquerda os dois lados da EDO por e^{-tA} (note que aqui não faz sentido multiplicar à direita), obtendo:

$$e^{-tA} \cdot Y'(t) - e^{-tA} \cdot A \cdot Y(t) = e^{-tA} \cdot B(t).$$

Pelo Teorema 1, o lado direito dessa igualdade é $\frac{d}{dt}(e^{-tA} \cdot Y(t))$.[6] Assim, podemos integrar e obter

$$e^{-tA} \cdot Y(t) = \int e^{-tA} \cdot B(t)\, dt.$$

Calculando a integral indefinida do vetor-coluna $\int e^{-tA} \cdot B(t)$ (cada entrada da matriz é integrada separadamente), obtemos algo do tipo $F(t) + C$, onde a "constante de integração" C é também um vetor-coluna. Multiplicando à direita pela inversa de e^{-tA}, que é[7] e^{tA}, obtemos

$$Y(t) = e^{tA}F(t) + e^{tA}C.$$

Note que $e^{tA}F(t)$ é uma solução particular da equação não-homogênea (basta tomar $C = 0$), e que $e^{tA}C$ é a solução geral da equação homogênea encontrada em 4. (Mas cuidado: não temos mais $C = Y(0)$.)

Veja um exemplo abaixo (Exemplo 5).

Observação 6. O método do fator integrante, apesar de muito elegante pode ser trabalhoso na prática. Veja outros métodos no Boyce–DiPrima.

Observação 7 ($\star$ Relação com o método de variação dos parâmetros)**.** A partir do método do fator integrante explicado acima, vamos reobter o método da variação dos parâmetros (ver § 3.6 do Boyce–DiPrima) no caso de coeficientes constantes. Considere uma EDO linear não-homogênea de 2ª ordem:

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g(t), \quad \text{com coeficientes } p,\ q \text{ constantes.}$$

[6]É necessário usar a regra da derivada do produto de matrizes, que é $(M \cdot N)' = M' \cdot N + M \cdot N'$ (multiplicações nesta ordem!). Prova: exercício ($\star$).

[7]Exercício $\star$.

Podemos reescrevê-la como um sistema

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + B(t), \quad \text{onde} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $\{y_1, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada (1). Lembre a relação 3 entre essas funções e a matriz e^{tA}. Vamos usar isto para calcular e^{-tA}:

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot C^{-1} \right]^{-1} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}^{-1}$$

Lembrando que a inversa de uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é $\dfrac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, e usando a definição (2) do Wronskiano, temos

$$e^{-tA} = C \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

Agora aplicamos o método do fator integrante para achar a solução de $Y' = AY + B$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{tA} \int e^{-tA} \cdot B(t)\, dt \\ &= \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot C^{-1} \cdot \int C \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \int \frac{g(t)}{W(t)} \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ -y_1(t) \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Logo a primeira entrada de $Y(t)$ é $y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ onde

$$u_1(t) = -\int \frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}\, dt, \quad u_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}\, dt.$$

Estas são as fórmulas do método de variação dos parâmetros.

3. Como calcular exponencial de matrizes

A definição da exponencial não é um método muito prático para fazer contas (exceto talvez numericamente). Vejamos outros métodos.

3.1. **O método mais rápido de todos: via MAPLE.**

Exemplo 4. Vamos calcular a exponencial de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[1,1],[-2,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixExponential(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2\,e^2 - e^3 & e^3 - e^2 \\ -2\,e^3 + 2\,e^2 & -e^2 + 2\,e^3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5. Aqui vai um exemplo de resolução de sistema não-homogêneo por fator integrante, fazendo as contas com o Maple. O problema aperece no Boyce–DiPrima pág. 337 (Seção 7.9). (É claro seria mais fácil mandar o Maple resolver tudo logo, mas aí não estaríamos ilustrando o método do F.I.)

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[-2,1], [1,-2]]);B:=Matrix([[2*exp(-t)],[3*t]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t} \\ 3\,t \end{bmatrix}$$

```
> integrando:=Multiply(MatrixExponential(-t*A),B): simplify(integrando);
```

$$\begin{bmatrix} 1 + \mathrm{e}^{2\,t} - 3/2\,t\mathrm{e}^{3\,t} + 3/2\,t\mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{2\,t} + 1 + 3/2\,t\mathrm{e}^{t} + 3/2\,t\mathrm{e}^{3\,t} \end{bmatrix}$$

```
> f1:=int(1+exp(2*t)-(3/2)*t*exp(3*t)+(3/2)*t*exp(t),t):
> f2:=int(-exp(2*t)+1+(3/2)*t*exp(t)+(3/2)*t*exp(3*t),t):
> FmaisC:=Matrix([[f1+c1],[f2+c2]]);
```

$$\mathit{FmaisC} := \begin{bmatrix} t + 1/2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 1/2\,t\mathrm{e}^{3\,t} + 1/6\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3/2\,t\mathrm{e}^{t} - 3/2\,\mathrm{e}^{t} + \mathit{c1} \\ -1/2\,\mathrm{e}^{2\,t} + t + 3/2\,t\mathrm{e}^{t} - 3/2\,\mathrm{e}^{t} + 1/2\,t\mathrm{e}^{3\,t} - 1/6\,\mathrm{e}^{3\,t} + \mathit{c2} \end{bmatrix}$$

```
> simplify(Multiply(MatrixExponential(t*A),FmaisC));
```

$$\begin{bmatrix} -4/3 + t + \mathrm{e}^{-t}t + 1/2\,\mathrm{e}^{-t}\mathit{c1} + 1/2\,\mathrm{e}^{-t} + 1/2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\mathit{c1} - 1/2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\mathit{c2} + 1/2\,\mathrm{e}^{-t}\mathit{c2} \\ -5/3 + 2\,t + \mathrm{e}^{-t}t + 1/2\,\mathrm{e}^{-t}\mathit{c1} - 1/2\,\mathrm{e}^{-t} - 1/2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\mathit{c1} + 1/2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\mathit{c2} + 1/2\,\mathrm{e}^{-t}\mathit{c2} \end{bmatrix}$$

3.2. ($\star$) **Método trabalhoso: via autovetores etc.** Este método é conceitualmente simples, porém na prática trabalhoso.

Lembremos da álgebra linear que a matriz A é diagonalizável se e somente se existe uma matriz invertível B e uma matriz diagonal D tais que $A = BDB^{-1}$. (As entradas da diagonal de D são os autovalores de A, e as colunas de B são os correspondentes autovetores de A.) Então $e^A = Be^DB^{-1}$, como mostra a seguinte conta:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(BDB^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{BD^nB^{-1}}{n!} = B\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right)B^{-1} = Be^DB^{-1}.$$

Como D é diagonal, é muito fácil calcular e^D: veja o Exemplo 1. Isso permite calcular a exponencial e^A de qualquer matriz diagonalizável A.[8]

Exemplo 6. Vamos calcular de novo a exponencial da matriz A do Exemplo 4. Fazendo as contas, encontramos os autovalores 2 e 3, com respectivos autovetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Portanto $A = BDB^{-1}$, onde $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim

$$e^A = Be^DB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & -e^2 + e^3 \\ 2e^2 - 2e^3 & -e^2 + 2e^3 \end{pmatrix}$$

E se a matriz A não for diagonalizável? Para simplificar, vamos supor que A é 2×2. Aí temos dois casos:

Caso de autovalores complexos: Nesse caso, é possível encontrar uma diagonalização complexa, isto é, escrever $A = BDB^{-1}$ sendo as matrizes D e B complexas, e D diagonal. A exponencial de matrizes

[8] Isso é tudo que é explicado no Boyce–DiPrima (ver Seção 7.7).

complexas é definida pelas mesma série de potências, e ainda vale que $e^A = B \cdot e^D \cdot B^{-1}$. É fácil calcular e^D, lembrado que $e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Portanto podemos encontrar e^A.

Caso de autovalor real duplo: Nesse caso, é possível encontrar uma matriz invertível B e uma matriz $J = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ tal que $A = BJB^{-1}$. (λ é o autovalor, c não é único e não significado intrínseco.) Temos $e^A = B \cdot e^J \cdot B^{-1}$, e a matriz e^J foi calculada no Exercício 1.

O método esboçado aqui para calcular exponencial de matrizes 2×2 pode ser aplicado para matrizes maiores; aí é necessário usar a *forma de Jordan* quando a matriz não é diagonalizável.

3.3. **Método mais rápido: via cálculo funcional.** Este método é na prática fácil de usar, porém meio mágico (e um pouco mais difícil de entender porque funciona). Tendo em vista aplicações (lembre do Teorema 4), vamos dizer como calcular e^{tA}, onde t é um real.

A regra básica é a seguinte:

> e^{tA} será igual a $p(A)$, onde p é um polinômio espertamente escolhido, mas que só depende dos autovalores de A.

O quê significa $p(A)$? Se $p(x)$ é uma função polinomial de uma variável x, e A é uma matriz quadrada então definimos $p(A)$ assim: na expressão de $p(x)$, substituímos x por A, substituímos constante por constante vezes Id e fazemos as contas. Por exemplo, se $f(x) = 3x^2 - 7$ então $f(A) = 3A^2 - 7\mathrm{Id}$.

Vamos explicar como encontrar o tal polinômio. *Vamos supor que a matriz A é 2×2.* Nesse caso, o polinômio p será de grau 1, isto é, da forma $p(x) = ax + b$ (onde a e b são na verdade funções de t). A receita é a seguinte:

(1) Calcule os autovalores de A.
(2) Para encontrar os coeficientes a e b do polinômio $p(x) = ax + b$, faça o seguinte, dependendo do caso:
   Caso A tem autovalores reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Iguale $p(\lambda_1) = e^{t\lambda_1}$ e $p(\lambda_2) = e^{t\lambda_2}$ e resolva.
   Caso A tem autovalor real duplo λ: Iguale $p(\lambda) = e^{t\lambda}$ e $p'(\lambda) = te^{t\lambda}$ (que é $\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{t\lambda}$) e resolva.
   Caso A tem autovalores complexos (não reais) $\alpha \pm \beta i$: Iguale $p(\alpha + \beta i) = e^{t(\alpha+\beta i)}$ (que é $e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$ e resolva para encontrar coeficientes *reais* a e b.[9]
(3) Então e^{tA} é igual a $p(A)$, ou seja, $aA + b\mathrm{Id}$ (onde a e b são funções de t).

Daremos agora exemplos de cada um dos três casos:

[9]Não é necessário considerar o outro autovalor $\alpha - i\beta$, pois a condição $p(\alpha - \beta i) = e^{t(\alpha - \beta i)}$ será automaticamente satisfeita.

Exemplo 7. Calcule e^A onde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculando os autovalores, encontramos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Devemos encontrar função $p(x) = ax + b$ tal que $p(-1) = e^{-1}$ e $p(2) = e^2$, isto é,
$$\begin{aligned} -a+b &= e^{-1} \\ 2a+b &= e^2 \end{aligned}$$
Resolvendo o sisteminha, encontramos
$$a = \frac{e^2 - e^{-1}}{3}, \quad b = \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3}.$$
Portanto
$$\begin{aligned} e^A = aA + b\mathrm{Id} &= \frac{e^2 - e^{-1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2e^2 + e^{-1})/3 & (2e^2 - 2e^{-1})/3 \\ (e^2 - e^{-1})/3 & (e^2 + 2e^{-1})/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 8. Calcule e^{tA} onde
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
O autovalor é 1 (duplo). O polinômio $p(x)$ de grau 1 tal que $p(1) = e^t$, $p'(1) = te^t$ é $p(x) = te^t x + (1-t)e^t$. Logo
$$e^{tA} = p(A) = te^t A + (1-t)e^t \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^t & 2te^t \\ -2te^t & (1-2t)e^t \end{pmatrix}.$$
Obs: Um teste básico (mas não suficiente) para erros de contas é verificar se isso dá Id quando $t = 0$.

Exemplo 9. Calcule e^A onde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Os autovalores são $1 \pm 2i$. Devemos encontrar função $p(x) = ax + b$, onde a e b são reais, tal que $p(1+2i) = e^{1+2i}$, isto é,
$$\begin{aligned} (1+2i)a + b &= e^1(\cos 2 + i \sin 2) \\ (a+b) + i(2a) &= (e\cos 2) + i(e \sin 2) \end{aligned}$$
Portanto devemos ter
$$\begin{aligned} a+b &= e\cos 2 \\ 2a \quad &= e \sin 2 \end{aligned}$$
Logo
$$a = \tfrac{1}{2} e \sin 2, \quad b = e\cos 2 - \tfrac{1}{2} e \sin 2.$$
Portanto
$$e^A = aA + b\mathrm{Id} = \frac{e \sin 2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2e\cos 2 - e\sin 2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\cos 2 & e \sin 2 \\ -e \sin 2 & e\cos 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. Refaça os exemplos e exercícios anteriores usando cálculo funcional.

Exercício 8 ($\star$)**.** Suponha que A é uma matriz 2×2 de traço zero tal que $e^A = 7A + 2\mathrm{Id}$. Determine os autovalores de A.

Resposta: -0.1645 e 3.1924; é necessário usar o MAPLE (fsolve).

Como calcular e^{tA} se A é uma matriz maior? Teremos $e^{tA} = p(A)$, onde o polinômio $p(x)$ é encontrado de modo a satisfazer as seguintes condições: para cada autovalor λ de multiplicidade m,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= e^{t\lambda} \\ p'(\lambda) &= te^{t\lambda} \quad (\text{que é } \tfrac{\partial}{\partial\lambda}e^{t\lambda}) \\ p''(\lambda) &= t^2e^{t\lambda} \quad (\text{que é } \tfrac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^{t\lambda}) \\ &\dots \\ p^{(m-1)}(\lambda) &= t^{m-1}e^{t\lambda} \quad (\text{que é } \tfrac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}e^{t\lambda}). \end{aligned}$$

Cada autovalor de multiplicidade m dá origem a m condições sobre o polinômio $p(x)$. A soma das multiplicidades dos autovalores de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é n. Portanto, teremos em geral que usar um polinômio de grau $n - 1$ (que tem n coeficientes a serem determinados).

Exemplo 10. Vamos resolver a equação $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são: $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade $m_1 = 1$, e $\lambda_2 = 0$ com multiplicidade $m_2 = 2$. Vamos calcular e^{tA}. Temos $f(z) = e^{tz}$ e procuramos um polinômio quadrático $p(z) = az^2 + bz + c$. As condições são:

$$\begin{aligned} p(0) = c &= f(0) = 1 \\ p'(0) = b &= f'(0) = t \\ p(1) = a + b + c &= f(1) = e^t \end{aligned}$$

Achamos $a = e^t - t - 1$, $b = t$, e $c = 1$. Assim:

$$e^{tA} = (e^t - t - 1)A^2 + tA + \mathrm{Id} \quad \text{e} \quad Y(t) = e^{tA} \cdot Y(0).$$

3.4. **($\star$) Ainda um outro método (apenas para matrizes 2×2).** Veja www.mat.puc-rio.br/disciplinas/MAT1154/exp2x2.pdf

Agora que você já sabe calcular exponencial de qualquer matriz, resolva usando o Teorema 4 os seguintes exercícios do Boyce–DiPrima (nona edição):

- **Seção 7.5:** 2, 4, 6, 8, 12, 30.
- **Seção 7.6:** 3, 4, 5, 28. [Faça também 13, 14, 15 – esses não precisam da exponencial]
- **Seção 7.7:** 1, 5, 15($\star$).
- **Seção 7.8:** 1, 7, 11.

4. ($\star$) Cálculo funcional geral

4.1. **Calculando funções de matrizes quadradas.** O truque explicado acima é ainda mais poderoso, e pode ser usado de maneira análoga para calcular por exemplo potências de matrizes (ou até mesmo loucuras como seno de matriz ...).

Receita básica do Cálculo Funcional. *Dada uma função f qualquer*[10], *e dada a matriz A (digamos $n \times n$), fazemos o seguinte para encontrar $f(A)$:*

(1) *Calculamos* todos *seus autovalores $\lambda_1, \dots \lambda_k$ e respectivas multiplicidades $m_1, \dots, m_k$ (de modo que $m_1 + \cdots + m_k = n$.)*
(2) *Encontramos um polinômio p tal que para cada autovalor λ_i vale $p(\lambda_i) = f(\lambda_i), \dots, p^{(m_i-1)}(\lambda_i) = f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$. Isso é sempre possível de se fazer com um polinômio de grau n; os coeficientes desse polinômio podem ser encontrados resolvendo um sistema linear.*
(3) *Calculamos $p(A)$. O resultado será o mesmo que $f(A)$.*

Exemplo 11. Encontre uma matriz B tal que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chame de A a matriz do lado direito; então queremos calcular $B = \sqrt{A}$, se é que isso faz sentido. Vamos usar o Cálculo Funcional e ver o que acontece. Os autovalores de A são 2 e 3. Considere $f(x) = \sqrt{x}$. Vamos encontrar um polinômio $p(x) = ax + b$ tal que $p(2) = f(2)$ e $p(3) = f(3)$. Fazendo as contas encontramos $a = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$. Logo

$$B = f(A) = p(A) = aA + b\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & -\sqrt{2} + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,. \end{pmatrix}$$

Fazendo a conta verificamos que de fato $B^2 = A$, portanto o problema está resolvido, ainda que os passos intermediários tenham sido obscuros.

4.2. ($\star\star$) **Por que o Cálculo Funcional funciona.** Para explicar a mágica, precisamos recordar alguns fatos a respeito do *polinômio característico* $K(x)$ de uma matriz quadrada A:

- Ele é definido por $K(x) = \det(x\mathrm{Id} - A)$.
- Um número (real ou complexo) λ é uma raiz de multiplicadade m do polinômio característico se e somente se λ é um autovalor de A com multiplicidade m.
- Em particular,

$$K(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}, \tag{4}$$

  onde $\lambda_1, \dots \lambda_k$ são os autovalores de A com respectivas multiplicidades $m_1, \dots, m_k$.
- $K(A) = 0$. Este é o *Teorema de Cayley–Hamilton*, cuja prova pode ser encontrada em qualquer livro de Álgebra Linear decente.[11]

Vamos primeiro considerar um caso particular do Cálculo Funcional.

[10] Há uma trapaça aqui.

[11] O Teorema de Cayley–Hamilton pode parecer misterioso à primeira vista, mas não é tão difícil perceber que ele deve ser verdade: Segue de (4) que $K(A) \cdot v = 0$ para todo autovetor v. Se a matriz A for diagonalizável, então isso já garante que $K(A) = 0$. Portanto o TCH é verdadeiro para as matrizes diagonalizáveis, as quais constituem uma parte "gorda" (aberta) do espaço das matrizes $n \times n$. Seria muito estranho (e de fato, é impossível) que uma afirmação algébrica como o TCH valesse em uma parte gorda do espaço sem ser verdade no espaço inteiro.

Prova de que a Receita funciona se a função $f(x)$ é um polinômio. Suponha que $p(x)$ satisfaz os requerimentos da receita, e considere $h(x) = f(x) - p(x)$. Como estamos supondo que $f(x)$ é polinômio, $h(x)$ também é. Precisamos provar que $h(A) = 0$.

Pela definição de $P(x)$, para todo autovalor λ de A (inclusive para os complexos), vale que $h(\lambda) = h'(\lambda) = h''(\lambda) = \cdots = h^{(m-1)}(\lambda) = 0$, onde m é a multiplicidade de λ. Isso quer dizer que λ é uma raiz de $h(x)$ com multiplicidade m ou maior. Segue de (4) (e do Teorema Fundamental da Álgebra) que o polinômio $h(x)$ é divisível pelo polinômio característico, isto é, existe outro polinômio $q(x)$ tal que $h(x) = q(x)K(x)$. Logo, pelo Teorema de Cayley–Hamilton, $h(A) = q(A)K(A) = 0$, como queríamos provar. $\square$

Agora vamos considerar funções $f(x)$ mais gerais. Uma maneira de dar sentido a $f(A)$ seria imitar o que fizemos para definir exponencial de matrizes: usamos a série de potências de A, *supondo que ela exista.*[12] Uma tal série é uma maneira de aproximar uma função por polinômios. Já provamos que o Cálculo Funcional funciona para polinômios, assim já não é surpreendente que ele valha para uma tal $f(x)$... Porém, demonstrar isso iria requerer conhecimento mais profundo sobre funções (Análise Complexa), assim paramos por aqui.

4.3. **Atalhos.** Para matrizes maiores que 2×2, existem alguns atalhos que às vezes facilitam o uso do Cálculo Funcional.

Teorema 5. *Se a matriz é* simétrica *então podemos seguir a receita básica do Cálculo Funcional fingindo que todos os autovalores têm multiplicidade* 1.

Isso é útil pois aí o polinômio p a ser encontrado terá possivelmente grau menor.

Exemplo 12. Calcule a décima potência da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são 1 e 15 (confira: qual é o autovalor duplo?). Como A é simétrica, é diagonalizável. Para calcular A^{10}, procure um polinômio linear levando 1 a $1^{10} = 1$ e 15 a 15^{10}. Temos:

$$p(x) = \frac{15^{10} - 1}{14} x + \frac{15 - 15^{10}}{14}$$

e

$$A^{10} = p(A) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 2\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 5\alpha + \beta & 6\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha & 10\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

onde

$$\alpha = \frac{15^{10} - 1}{14}, \quad \beta = \frac{15 - 15^{10}}{14}.$$

[12] A série de potências não precisa estar centrada no zero ("série de MacLaurin"). Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x}$ que apareceu no Exemplo 11 podemos considerar a expansão de Taylor centrada em qualquer ponto $x_0 \neq 0$.

Note que se tivéssemos seguido a receita principal teríamos que achar um polinômio de grau dois enquanto no presente caso um de primeiro grau é suficiente.

Indicação da prova do Teorema 5 (⋆⋆).

- Por um teorema importante de álgebra linear, toda matriz simétrica é diagonalizável.
- Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores (sem repetições). Defina o polinômio $M(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$. Como a matriz A é diagonalizável, vemos que $M(A) = 0$.[13]
- Refaça a prova dada acima que o Cálculo Funcional funciona usando o polinômio $M(x)$ em vez do polinômio característico $K(x)$.

□

Outro atalho, que é útil quando os autovalores são todos simples, ou (em vista do Teorema 5) é usar o polinômio interpolador de Lagrange (googleie).

4.4. **Muito mais.** Para saber mais a respeito do Cálculo Funcional e suas aplicações, veja apostilas antigas no site de MAT1154. A apostila de Hamilton Bueno é bastante completa, mas requer conhecimentos mais avançados.

[13] Mais ainda, $M(x)$ é o *polinômio mínimo* de A, isto é, o polinômio com menor grau possível e coeficiente principal igual a 1 tal que $p(A) = 0$.