

45. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as multiplicidades algébricas dos autovalores de A e de B são iguais.
46. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as mul-

tiplicidades geométricas dos autovalores de A e de B são iguais. (*Sugestão:* mostre que, se $B = P^{-1}AP$, então todo autovetor de B tem a forma $P^{-1}\mathbf{v}$ para algum autovetor \mathbf{v} de A .)

4.6 Métodos Iterativos para o Cálculo de Autovalores

A té aqui, o único método que temos para o cálculo de autovalores de uma matriz é achar as soluções da sua equação característica. No entanto, esse método enfrenta vários problemas que o tornam praticável somente em um número pequeno de exemplos. O primeiro problema é que ele depende do cálculo de um determinante, o que, para matrizes grandes, é um processo muito demorado. O segundo problema é que a equação característica é uma equação polinomial, e não existem fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior do que 4 (equações dos graus 2, 3 e 4 podem ser solucionadas utilizando a fórmula quadrática e suas análogas). Assim, somos forçados a encontrar valores *aproximados* para os autovalores na maioria dos problemas práticos. Infelizmente, métodos para a determinação de raízes aproximadas de uma equação polinomial não são em geral confiáveis por não garantirem uma margem de erro desejável.

Tomaremos um outro caminho para contornar as dificuldades com os polinômios característicos. Vamos primeiro aproximar autovetores e depois usá-los para encontrar seus correspondentes autovalores. Nesta seção, vamos explorar algumas variações de um desses métodos baseado em uma técnica iterativa simples.

O Método da Potência

O método da potência se aplica a matrizes $n \times n$ que tenham um **autovalor dominante** λ_1 , ou seja, um autovalor cujo valor absoluto seja maior que todos os outros autovalores. Por exemplo, se uma matriz tem autovalores $-4, -3, 1$ e 3 , então -4 é o autovalor dominante, já que $4 = |-4| > |-3| \geq |3| \geq |1|$. Por outro lado, uma matriz com autovalores $-4, -3, 3$ e 4 não tem autovalor dominante.

O método da potência procede de forma iterativa para produzir uma seqüência de escalares que converge para λ_1 e uma seqüência de vetores que converge para o autovetor correspondente \mathbf{v}_1 , o **autovetor dominante**. Por simplicidade, vamos assumir que a matriz A é diagonalizável. O Teorema seguinte fornece a base para o método da potência.

◆ TEOREMA I

Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalor dominante λ_1 . Então, existe um vetor \mathbf{x}_0 não nulo tal que a seqüência de vetores \mathbf{x}_k definida por

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \dots$$

tende a um autovetor dominante de A .

Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829) provou que uma equação polinomial genérica do quinto grau (uma *quintica*) não é *solúvel por radicais* – ou seja, não há fórmula que determine suas soluções e que empregue somente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes n -ésimas. Em um artigo escrito em 1830 e publicado postumamente em 1846, o matemático francês Evariste Galois (1811–1832) fez uma teoria mais completa que estabeleceu condições sob as quais uma equação polinomial arbitrária pode ser solúvel por radicais. O trabalho de Galois foi o instrumento que estabeleceu o ramo da álgebra chamado de *teoria de grupos*; sua própria abordagem das equações polinomiais é hoje conhecida como *teoria de Galois*.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos considerar que os autovalores de A foram indexados de maneira a termos

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ os autovetores correspondentes. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes (por quê?), eles formam uma base do \mathbb{R}^n . Conseqüentemente, podemos escrever \mathbf{x}_0 como uma combinação linear desses autovetores – digamos,

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

Mas $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = A(A^2\mathbf{x}_0) = A^3\mathbf{x}_0$, e, de forma geral,

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 \quad \text{para } k \geq 1$$

Como vimos no Exemplo 4 de Seção 4.4,

$$\begin{aligned} A^k \mathbf{x}_0 &= c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1^k \left(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n \right) \end{aligned} \quad (1)$$

onde utilizamos o fato de que $\lambda_1 \neq 0$.

O fato de λ_1 ser o autovalor dominante significa que cada uma das frações $\lambda_2/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_1, \dots, \lambda_n/\lambda_1$ é menor que 1 em valor absoluto. Assim,

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k$$

é uma seqüência que tende a zero quando $k \rightarrow \infty$. Daí segue que

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 \rightarrow \lambda_1^k c_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty \quad (2)$$

Como $\lambda_1 \neq 0$ e $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, \mathbf{x}_k se aproxima de um múltiplo não nulo de \mathbf{v}_1 (ou seja, de um autovetor correspondente a λ_1), se $c_1 \neq 0$. (Essa é a condição imposta sobre o vetor \mathbf{x}_0 inicial: ele deve ter uma componente c_1 na direção do autovetor dominante \mathbf{v}_1 .) ♦

EXEMPLO 1 Encontre uma seqüência que aproxime o autovetor dominante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ utilizando o método do Teorema 1.

SOLUÇÃO: Tomaremos como vetor inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então:

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Continuamos, dessa maneira, para obter os valores de \mathbf{x}_k da Tabela 1.

Tabela 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\mathbf{x}_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 43 \\ 42 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 85 \\ 86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 171 \\ 170 \end{bmatrix}$
r_k	–	0,50	1,50	0,83	1,10	0,95	1,02	0,99	1,01
l_k	–	1,00	3,00	1,67	2,20	1,91	2,05	1,98	2,01

A Figura 1 mostra o que está acontecendo geometricamente. Sabemos que o auto-subespaço correspondente ao autovetor dominante terá dimensão igual a 1. (Por quê? Veja o Exercício 46.) Portanto, ele será representado por uma reta que passa pela origem, no plano \mathbb{R}^2 . Alguns dos \mathbf{x}_k iniciais do processo de iteração são mostrados, juntamente com as direções que eles determinam. Aparentemente, a iteração funciona como se os \mathbf{x}_k estivessem convergindo para a reta cujo vetor diretor

é $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para confirmar que esse é o autovetor dominante que procuramos, basta observar que a razão r_k

entre a primeira e a segunda componente do vetor \mathbf{x}_k vai ficando muito perto de 1 à medida que k aumenta. A segunda linha da Tabela 1 fornece esses valores, onde se pode ver, claramente, que r_k está de fato se aproximando de 1. Deduzimos, assim, que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor dominante de A .

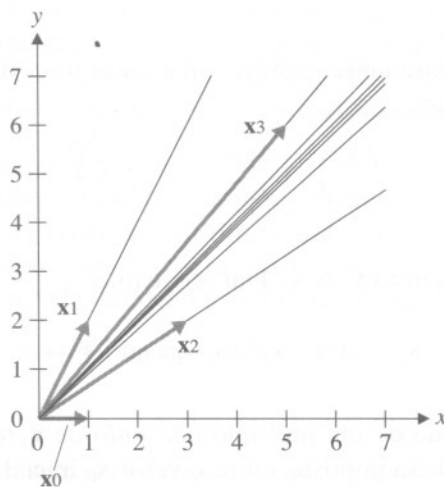


Figura 1

Uma vez que encontramos um autovetor dominante, como podemos encontrar o correspondente autovalor dominante? Uma maneira de fazê-lo é observando que, se um \mathbf{x}_k é aproximadamente um autovetor dominante de A correspondente ao autovalor dominante λ_1 , então

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \approx \lambda_1\mathbf{x}_k$$

Daí segue que a razão l_k entre a primeira componente de \mathbf{x}_{k+1} e a de \mathbf{x}_k irá se aproximar de λ_1 à medida que k aumentar. A Tabela 1 fornece os valores de l_k ; você pode ver que eles se aproximam de 2, que é o autovalor dominante.

O método do Exemplo 1 tem um senão: as componentes dos \mathbf{x}_k obtidos na iteração viram rapidamente números muito grandes, o que pode ocasionar erros significativos ao final do processo. Para evitar esse problema, podemos multiplicar, a cada passo da iteração, o vetor obtido por algum escalar que reduza a magni-

de de suas componentes. Como múltiplos escalares dos \mathbf{x}_k ainda irão convergir para um autovetor dominante, a estratégia é aceitável. Existem várias maneiras de proceder nesse caso. Uma possibilidade é normalizar os \mathbf{x}_k , dividindo-os por $\|\mathbf{x}_k\|$ (isto é, fazendo cada vetor obtido na iteração ficar *unitário*). Um método mais fácil – e o que iremos utilizar – é fazer a divisão de cada um dos \mathbf{x}_k pela sua componente de maior valor absoluto, para que a maior componente fique igual a 1. Esse é o método chamado de **mudança de escala**. Assim, m_k denota a componente de \mathbf{x}_k de maior valor absoluto, substituímos \mathbf{x}_k por $\mathbf{y}_k = (1/m_k)\mathbf{x}_k$.

Ilustraremos esse método com cálculos sobre o Exemplo 1. Para \mathbf{x}_0 , não há nada a fazer, já que $m_0 = 1$. Logo,

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos agora $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ como antes, mas fazendo uma mudança de escala na qual $m_1 = 2$, para obter

$$\mathbf{y}_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

partir daqui os cálculos mudam. Tomamos

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, com a mudança de escala, torna-se

$$\mathbf{y}_2 = \left(\frac{1}{1,5}\right)\begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,67 \end{bmatrix}$$

os próximos cálculos estão resumidos na Tabela 2.

Pode-se ver claramente que a seqüência de vetores \mathbf{y}_k converge para $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, que é um autovetor dominante.

Além disso, a seqüência de escalares m_k converge para o correspondente autovalor dominante $\lambda_1 = 2$.

Tabela 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\mathbf{x}_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,67 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,83 \\ 1,67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,91 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,95 \\ 1,91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,98 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,98 \end{bmatrix}$
\mathbf{y}_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,83 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,95 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,98 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,99 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,99 \end{bmatrix}$
m_k	1	2	1,5	2	1,83	2	1,95	2	1,99

Resumimos a seguir os procedimentos do chamado **método da potência**.

O MÉTODO DA POTÊNCIA

Considere A como uma matriz $n \times n$ diagonalizável com um autovalor dominante λ_1 .

1. Seja $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$ um vetor inicial do \mathbb{R}^n cuja maior componente é 1.

2. Repita os seguintes passos para $k = 1, 2, \dots$:

(a) Calcule $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$.

(b) Seja m_k a componente de \mathbf{x}_k com maior valor absoluto.

(c) Seja $\mathbf{y}_k = (1/m_k)\mathbf{x}_k$.

Para a maioria das escolhas de \mathbf{x}_0 , m_k converge para o autovalor dominante λ_1 , e \mathbf{y}_k converge para um autovetor dominante.