$\boxed{\textbf{Prova tipo C}}$

# P4 de Álgebra Linear I – 2004.2 (29/11/04)

## Respostas

**1)**

**a)** Considere o ponto $Q = (3, 1, 2)$ e a reta $r$ de equações paramétricas

$$r\colon (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(2, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine o ponto $A$ de $r$ mais próximo de $Q$.

**b)** Considere a reta $s$ de equações paramétricas

$$s\colon (x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-2, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine as equações cartesianas de um plano $\rho$ paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ e que contenha a reta $s$.

**c)** Considere as retas $r_1$ e $r_2$ de equações paramétricas

$$\begin{aligned} r_1 &= (1 + 2t, 1 - t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R};\\ r_2 &= (4 - t, -1 + t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Caso as retas sejam reversas responda **reversas** e calcule a distância entre as retas. Caso as retas sejam concorrentes responda **concorrentes** e determine o ponto de interseção.

**Respostas:**

**a)** $\boxed{A = (4, 3, 2)}$

**b)** $\rho \colon x + 2y = 7$

**c)** concorrentes. ponto de interseção $(3, 0, 2)$

---

**2)** Considere a matriz $N$

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**a)** Determine os autovalores de $N$ e suas multiplicidades.

**b)** Determine uma base $\beta$ de autovetores de $N$.

**c)** Determine uma matriz $D$ diagonal e uma matriz $P$ tais que

$$N = P\, D\, P^t.$$

**d)** Considere a matriz $M = N^{-1}$, a matriz inversa de $N$. Escreva $M$ da forma

$$M = Q\, E\, Q^{-1},$$

onde $E$ é uma matriz diagonal.

**e)** Considere a matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores de $L$ e suas multiplicidades.

**Respostas:**

**a)** autovalores: 1 (simples) e 4 (multiplicidade 2)

**b)** $\beta = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$

**c)**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

**d)**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad Q = P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

**e)** autovalores: 0 (multiplicidade 2), 356 (simples)

**3)** Considere a reta $r$ de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon x = 3\,y - 1$$

e o vetor $v = (1,1)$.

Considere a transformação afim $T$ *projeção na reta* $r$ *na direção do vetor* $v$, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde $Q$ é a interseção da reta $r$ e da reta $s$ que contém o ponto $P$ e é paralela ao vetor $v = (1,1)$.

**(a)** Determine a parte linear $L_T$ de $T$.

**(b)** Determine a forma matricial de $T$.

**Respostas:**

**a)**

$$[L] = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

**b)**

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

---

**4)** Considere os números $1/3, (-1/3), 2/3$ e $(-2/3)$.

**a)** Utilizando só estes números escreva uma matriz $R$, $3 \times 3$, que represente na base canônica uma rotação (de ângulo diferente de $\pi$).

**b)** Determine o $\cos(\alpha)$ onde $\alpha$ é o ângulo de rotação de $R$.

**c)** Determine a equação paramétrica do eixo de rotação de $R$.

**Respostas:**

**a)** Qualquer matriz ortogonal, não simétrica e de determinante igual a 1. Alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

Também valem todas as transpostas...

**b)**

$$\cos\alpha = \frac{\text{traço}(R) - 1}{2}$$

**c)** O eixo de rotação é a reta de vetor diretor um autovetor associado a 1 que contém a origem.