Prova tipo B

P4 de Álgebra Linear I – 2004.2 (29/11/04)

Respostas

1)

a) Considere o ponto $Q = (1, 2, 3)$ e a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (x, y, z) = (4, 1, 2) + t(-1, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine o ponto A de r mais próximo de Q.

b) Considere a reta s de equações paramétricas

$$s\colon (x, y, z) = (2, 1, 3) + t(1, 2, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine as equações cartesianas de um plano ρ paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$ e que contenha a reta s.

c) Considere as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1 = (1 - t, 1 + t, 1 + 2t), \quad t \in \mathbb{R};$$
$$r_2 = (-1 + t, 2t, 4 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso as retas sejam reversas responda **reversas** e calcule a distância entre as retas. Caso as retas sejam concorrentes responda **concorrentes** e determine o ponto de interseção.

Respostas:

a) $\boxed{A = (3, 2, 4)}$

b) $\rho\colon 2x + z = 7$

c) concorrentes. ponto de interseção $(0, 2, 3)$

---

2) Considere a matriz N

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de N e suas multiplicidades.

b) Determine uma base β de autovetores de N.

c) Determine uma matriz D diagonal e uma matriz P tais que

$$N = P\,D\,P^t.$$

d) Considere a matriz $M = N^{-1}$, a matriz inversa de N. Escreva M da forma

$$M = Q\,E\,Q^{-1},$$

onde E é uma matriz diagonal.

e) Considere a matriz

$$L = \begin{pmatrix} 11 & 111 & 1 \\ 22 & 222 & 2 \\ 33 & 333 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores de L e suas multiplicidades.

Respostas:

a) autovalores: 5 (simples) e 2 (multiplicidade 2)

b) $\beta = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$

c)

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

d)

$$E = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad Q = P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

e) autovalores: 0 (multiplicidade 2), 236 (simples)

3) Considere a reta r de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon x = 3\,y + 1$$

e o vetor $v = (1, 1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta* r *na direção do vetor* v, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1, 1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T.

(b) Determine a forma matricial de T.

Respostas:

a)

$$[L] = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

---

4) Considere os números $1/3, (-1/3), 2/3$ e $(-2/3)$.

a) Utilizando só estes números escreva uma matriz R, 3×3, que represente na base canônica uma rotação (de ângulo diferente de π).

b) Determine o $\cos(\alpha)$ onde α é o ângulo de rotação de R.

c) Determine a equação paramétrica do eixo de rotação de R.

Respostas:

a) Qualquer matriz ortogonal, não simétrica e de determinante igual a 1. Alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

Também valem todas as transpostas...

b)

$$\cos \alpha = \frac{\text{traço}(R) - 1}{2}$$

c) O eixo de rotação é a reta de vetor diretor um autovetor associado a 1 que contém a origem.