P2 de Álgebra Linear I – 2005.1
3 de maio de 2005

Gabarito

---

1) Considere a base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1.a) Prove que
$$\gamma = \{u_1 + u_2, u_1 + u_3, u_2 + u_3\}$$
é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(1.b) Considere um vetor w cujas coordenadas na base β são $(w)_\beta = (1, 2, 3)$. Determine as coordenadas $(w)_\gamma$ do vetor w na base γ.

(1.c) Considere agora a base de $\mathbb{R}^3$
$$\alpha = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (a, b, c)\}.$$
Sabendo que as coordenadas do vetor $(1, 4, 9)$ na base α são $(1, 2, 2)$ determine a, b e c.

(1.d) Considere os vetores
$$\begin{array}{lll} v_1 = (2, -1, 0), & v_2 = (2, 0, 1), & v_3 = (0, 1, 1), \\ v_4 = (4, -2, 0), & v_5 = (2, 2, 3), & v_6 = (1, 1, a). \end{array}$$
Determine o valor de $\mathbf{a}$ no vetor v_6 para que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 gerem um plano π. Determine a equação cartesiana de π.

Resposta:

(1.a) Como três vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ formam uma base, é suficiente verificar que os vetores $(u_1 + u_2)$, $(u_1 + u_3)$ e $(u_2 + u_3)$ são linearmente independentes. Considere uma combinação linear deste vetores dando o vetor nulo,
$$\sigma_1 (u_1 + u_2) + \sigma_2 (u_1 + u_3) + \sigma_3 (u_2 + u_3) = \bar{0}.$$

Devemos ver que σ_1, σ_2 e σ_3 são necessariamente nulos. A combinação linear acima pode ser escrita como

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\, u_1 + (\sigma_1 + \sigma_3)\, u_2 + (\sigma_2 + \sigma_3)\, u_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes, necessariamnete,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_3 = 0, \quad \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Portanto

$$\sigma_2 = -\sigma_1, \quad \sigma_3 = -\sigma_1.$$

Substituindo na última equação temos que

$$-2\,\sigma_1 = 0, \quad \sigma_1 = 0.$$

Logo,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Portanto, os vetores $(u_1 + u_2)$, $(u_1 + u_3)$ e $(u_2 + u_3)$ são l.i. e γ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(1.b) Sejam (a, b, c) as coordenadas de w na base γ, isto é,

$$\begin{aligned} w &= a\,(u_1 + u_2) + b\,(u_1 + u_3) + c\,(u_2 + u_3) = \\ &= (a + b)\, u_1 + (a + c)\, u_2 + (b + c)\, u_3. \end{aligned}$$

Por outra parte, como as coordenadas de w na base β são $(1, 2, 3)$, temos

$$w = (1)\, u_1 + (2)\, u_2 + (3)\, u_3.$$

Portanto, pela unicidade de coordenadas em uma base,

$$1 = a + b, \quad 2 = a + c, \quad 3 = b + c.$$

Logo,

$$1 = c - b, \quad 3 = c + b,$$

portanto,

$$2\,c = 4, \quad c = 2, \quad b = 1, \quad a = 0.$$

Logo,

$$(w)_\gamma = (0, 1, 2).$$

(1.c) Pela definição de coordenadas em uma base, temos

$$(1,4,9) = 1\,(1,2,3) + 2\,(1,1,1) + 2\,(a,b,c).$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 &= 1+2+2\,a, \quad a=-1,\\ 4 &= 2+2+2b, \quad b=0,\\ 9 &= 3+2+2c, \quad c=2. \end{aligned}$$

Logo as coordenadas são $(-1,0,2)$.

(1.d) Os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes. Portanto geram um plano π cujo vetor normal n é seu produto vetorial:

$$n = (2,-1,0)\times(2,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,2).$$

Portanto,

$$\pi\colon x + 2\,y - 2\,z = 0.$$

Veja que os vetores v_3, v_4 e v_5 verificam a equação do plano π. Portanto, $v_1,\dots,v_5$ tambeém geram o plano π. Finalmente, devemos escolher a de forma que v_6 pertence ao plano π (caso contrário os vetores $v_1,\dots,v_6$ gerariam $\mathbb{R}^3$):

$$1+2-2\,a=0, \quad a=3/2.$$

---

2) Considere o vetor $w=(1,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear

$$M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad M(u) = u \times w.$$

(2.a) Determine a matriz $[M]$ de M na base canônica.

(2.b) Determine o subespaço imagem de M, isto é,

$$\text{im}\,(M) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M(v)=u\}.$$

(2.c) Determine o conjunto v de vetores que verifica

$$M(v) = (1, -1, 1).$$

(2.d) Estude se M possui (transformação linear) inversa. Em caso afirmativo, determine $[M]^{-1}$.

Resposta:

(2.a) Temos,

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= (x, y, z) \times (1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (y - 2\,z, -x + z, 2\,x - y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M(\mathbf{i}) = (0, -1, 2), \quad M(\mathbf{j}) = (1, 0, -1), \quad M(\mathbf{k}) = (-2, 1, 0).$$

Logo a matriz de M é

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2.b) O subespaço im (M) é gerado pelos vetores $M(\mathbf{i})$, $M(\mathbf{j})$ e $M(\mathbf{k})$. Todos estes vetores são (por definição de M) ortogonais a $(1, 2, 1)$. Portanto, como $M(\mathbf{i})$ e $M(\mathbf{j})$ são l.i., estes vetores geram um plano, no caso o plano π de vetor normal $(1, 2, 1)$. Como $M(\mathbf{k})$ pertence a dito plano, temos

$$\text{im } (M) = \pi \colon x + 2\,y + z = 0.$$

(2.c) Devemos resolver o sistema

$$M(x, y, x) = (y - 2\,z, -x + z, 2\,x - y) = (1, -1, 1).$$

Portanto,

$$y = 1 + 2\,z, \quad y = -1 + 2\,x, \quad x = 1 + z.$$

Veja agora que a equação $-x+z=-1$ decorre das outras. Portanto, escolhendo z como parâmetro temos:

$$(1+t, 1+2\,t, t) = (1,1,0) + t\,(1,2,1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} M((1,1,0)+t\,(1,2,1)) &= M((1,1,0)) + t\,M((1,2,1)) = \\ &= (1,1,0)\times(1,2,1) + t\,(1,2,1)\times(1,2,1) = \\ &= (1,1,0)\times(1,2,1) = (1,-1,1). \end{aligned}$$

(2.d) A transformação M não possui inversa. V. pode ver isto de várias formas (equivalentes)

- M não é sobrejetora: sua imagem é um plano e não $\mathbb{R}^3$.
- M não é injetora: existe $v \neq \bar{0}$ (por exemplo $(1,2,1)$) tal que $M(v)=\bar{0}$ (ou pode usar o item anterior).
- O determinante da matriz de M é nulo:

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)\,((-1)\,(0)-(2)\,(1)) + (-2)((-1)(-1)+(2)\,(0)) = \\ &= 2-2=0. \end{aligned}$$

---

3) Considere as retas

$$r_1\colon y = 2\,x-1, \qquad r_2\colon y = 3\,x-3$$

e

$$s_1\colon y = x+2, \qquad s_2\colon y=3.$$

Sejam T uma transformação afim

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

que verifica

$$T(r_1)=s_1 \quad \text{e} \quad T(r_2)=s_2$$

e $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a parte linear de T.

(3.a) Determine a matriz $[L]$ de L.

(3.b) Determine a forma matricial de T.

Resposta:

(3.a) A parte linear L de T deve transformar um vetor diretor de r_1 em um vetor diretor de s_1, e um vetor diretor de r_2 em um vetor diretor de s_2. Por exemplo,

$$L((1,2)) = (1,1), \quad L((1,3)) = (1,0).$$

Portanto,

$$L((0,1)) = L((1,3)-(1,2)) = L((1,3)) - L((1,2)) = (1,0)-(1,1) = (0,-1).$$

Logo

$$\begin{aligned} L((1,2)) &= L((1,0)) + L((0,2)) = L((1,0)) + 2\,L(0,1) = \\ &= L(1,0) + (0,-2) = (1,1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$L(1,0) = (1,3).$$

Logo,

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3.b) Sabemos que

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Também sabemos que o ponto de interseção das retas r_1 e r_2 deve ser levado no ponto de interseção das retas s_1 e s_2. Temos

$$r_1 \cap r_2 = (2,3), \quad s_1 \cap s_2 = (1,3).$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2+a=1, &\quad a=-1,\\ 3+b=3, &\quad b=0. \end{aligned}$$

Assim,

$$[T]\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique, por exemplo, que $T(r_1)=s_1$, veja que $r_1=(t,2\,t-1)$, logo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ 2\,t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1\\ 3\,t-2\,t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1\\ t+1 \end{pmatrix},$$

logo

$$x=t-1, \quad t=x+1, \quad y=t+1=x+2.$$

Finalmente, para ver que $T(r_2)=s_2$, veja que $r_2=(t,3\,t-3)$, logo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ 3\,t-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1\\ 3 \end{pmatrix}.$$

Logo $x=t-1$ e $y=3$ (que é a reta s_2).