P1 de Álgebra Linear I – 2006.1

Gabarito

---

1)

a) Considere a reta r de equação paramétrica

$$r = (1+t, 2-t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os planos π_1, π_2 e π_3 cujas equações cartesianas são

$$\pi_1 \colon x + 2\,y + a\,z = b, \quad \pi_2 \colon x - 2\,y + c\,z = d, \quad \pi_3 \colon x + y + f\,z = g.$$

Determine **a**,**b**,**c**,**d**,**f** e **g** para que a interseção dos planos π_1, π_2 e π_3 seja a reta r.

b) Considere os planos ρ_1, ρ_2 e ρ_3 cujas equações cartesianas são

$$\rho_1 \colon x + y + z = 1, \quad \rho_2 \colon x + 2\,y + 3\,z = 1, \quad \rho_3 \colon x + 3\,y + \alpha\,z = \beta.$$

Determine, <u>explicitamente</u>, valores de α e β para que a interseção dos planos ρ_1, ρ_2 e ρ_3 seja uma reta.

Resposta:

a) Observamos que o vetor normal $n_1 = (1, 2, a)$ do plano π_1 deve ser ortogonal ao vetor diretor $v = (1, -1, 1)$ da reta r. Portanto,

$$(1, 2, a) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 2 + a = 0, \quad a = 1.$$

A reta r está contida no plano π_1, em particular, o ponto $P = (1, 2, 1)$ da reta r deve verificar a equação do plano π_1. Logo,

$$1\,(1) + 2\,(2) + 1\,(1) = b = 6.$$

Logo

$$a = 1, \quad b = 6.$$

Analogamente, o vetor normal $n_2 = (1, -2, c)$ do plano π_2 deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta r. Portanto,

$$(1, -2, c) \cdot (1, -1, 1) = 1 + 2 + c = 0, \quad c = -3.$$

A reta r está contida no plano π_2, em particular, o ponto $P = (1, 2, 1)$ deve verificar a equação do plano π_2. Logo,

$$1\,(1) - 2\,(2) - 3\,(1) = d = -6.$$

Finalmente, o vetor normal $n_3 = (1, 1, f)$ do plano π_3 deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta r. Portanto,

$$(1, 1, f) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 + f = 0, \quad f = 0.$$

A reta r está contida no plano π_3, em particular, o ponto $P = (1, 2, 1)$ deve verificar a equação do plano π_3. Logo,

$$1\,(1) + 1\,(2) + 0\,(1) = g = 3.$$

Logo

$$f = 0, \quad g = 3.$$

b) Resolveremos o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ x + 2\,y + 3\,z = 1, \\ x + 3\,y + \alpha\,z = \beta, \end{array}$$

e escolheremos α e β de forma que o sistema seja indeterminado (com infinitas soluções).

Escalonando o sistema obtemos:

$$\begin{array}{llllll} x+ & y+ & z & = & 1, \\ & y+ & 2\,z & = & 0, \\ & 2\,y+ & (\alpha - 1)\,z & = & \beta - 1. \end{array}$$

Continuando o escalonamento, obtemos

$$\begin{array}{lllll} x+ & y+ & z & = & 1, \\ & y+ & 2\,z & = & 0, \\ & & (\alpha - 5)\,z & = & \beta - 1. \end{array}$$

Para o sistema admitir infinitas soluções a última equação deve desaparecer. Isto é
$$\alpha = 5, \quad \beta = 1.$$

Outra forma de resolver o problema é observar que a interseção dos planos ρ_1 e ρ_2 é a reta ℓ
$$\ell = (1 + t, -2\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Para isto é suficiente observar que um vetor diretor da reta é obtido considerando o produto vetorial dos vetores normais dos planos
$$(1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1).$$
Como a reta ℓ deve estar contida em ρ_3, o vetor normal de ρ_3 deve ser perpendicular ao vetor diretor de ℓ:
$$(1, 3, \alpha) \cdot (1, -2, 1) = 0, \quad 1 - 6 + \alpha = 0, \quad \alpha = 5.$$
Finalmente, como ponto $(1, 0, 0)$ pertence a ρ_3, obtemos $\beta = 1$.

---

2) Considere a reta
$$r = (1 + t, 1 - t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$
e o ponto
$$Q = (1, 0, 2).$$

(a) Escreva a reta r como a interseção de dois planos π e ρ (escritos na forma cartesiana) tais que π é paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$ (isto é, o vetor normal do plano π é ortogonal ao vetor $\mathbf{j}$) e ρ é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ (isto é, o vetor normal do plano ρ é ortogonal ao vetor $\mathbf{k}$).

(b) Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano τ que contém a reta r e o ponto Q.

(c) Determine a distância do ponto Q à reta r.

(d) Determine um ponto M da reta r tal que os pontos $P = (1, 1, 0)$, Q e M formem um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento PQ. (Observe que P está na reta r).

Resposta:

a) Observe que um vetor diretor da reta r é $v = (1, -1, 2)$. Como o plano π contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$, seu vetor normal é da forma

$$(1, -1, 2) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1).$$

Portanto, a equação cartesiana de π é da forma

$$\pi \colon 2\,x - z = d.$$

Finalmente, como o ponto $(1, 1, 0)$ da reta pertence a π obtemos $d = 2$. Logo,

$$\pi \colon 2\,x - z = 2.$$

Analogamente, como o plano ρ contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$, seu vetor normal é da forma

$$(1, -1, 2) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0).$$

Portanto, a equação cartesiana de ρ é da forma

$$\rho \colon x + y = d.$$

Finalmente, como o ponto $(1, 1, 0)$ da reta pertence a ρ obtemos $d = 2$. Logo,

$$\rho \colon x + y = 2.$$

Portanto, a equação cartesiana é

$$r \colon 2\,x - z = 2, \quad x + y = 2.$$

b) Considere o ponto $P = (1, 1, 0)$ da reta. Observe que os vetores $\overline{PQ} = (0, -1, 2)$ e $v = (1, -1, 2)$ são vetores paralelos ao plano τ. Portanto, as equações paramétricas de τ são

$$X = P + t\,v + s\,\overline{PQ}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Escrito em coordenadas,

$$\begin{array}{rcllll} x & = & 1+ & t & & \\ y & = & 1- & t- & s & , \quad s,t\in\mathbb{R}. \\ z & = & & 2\,t+ & 2\,s & \end{array}$$

Para determinar a equação cartesiana de τ observamos que o vetor normal de τ é

$$(1,-1,2)\times(0,-1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0,-2,-1).$$

Logo a equação cartesiana é da forma

$$2\,y + z = d.$$

Como $(1,1,0)$ deve verificar a equação, temos $d=2$. Logo

$$\tau\colon 2\,y + z = 2.$$

c) Determinaremos esta distância usando dois métodos.

Primeiro determinaremos o plano η que contém o ponto Q e é perpendicular a r. A interseção deste plano e da reta determina o ponto A de r mais próximo de Q. A distância é o módulo do vetor AQ. Observe que o ponto A é exatamente o ponto M do próximo item.

O vetor normal de η é o vetor diretor de r. Logo η é da forma

$$\eta\colon x - y + 2\,z = d.$$

Como o ponto Q pertence a η:

$$1 + 2 = d = 3.$$

Portanto,

$$\eta\colon x - y + 2\,z = 5.$$

Para determinar o ponto de interseção da reta e o plano devemos ver para que valor de t se verifica

$$1 + t - (1-t) + 2\,(2\,t) = 5, \quad 6\,t = 5, \quad t = 5/6.$$

Logo

$$A = (11/6, 1/6, 10/6).$$

temos

$$\overline{QA} = \frac{1}{6}\,(5, 1, -2).$$

Veja que este vetor é perpendicular ao vetor diretor de r. A distância é o módulo de $\overline{QA}$,

$$\text{distância} = |\overline{QA}| = \frac{1}{6}\sqrt{25+1+4} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

O segundo método consiste em considerar o paralelogramo cujas arestas são os vetores v (diretor da reta) e $\overline{PQ}$. Então a distância é

$$\text{distância} = \frac{|v \times \overline{PQ}|}{|v|}.$$

Temos

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Temos que

$$v \times \overline{PQ} = (1, -1, 2) \times (0, -1, 2) = (0, -2, -1)$$

(este cálculo já foi feito). Portanto, $|v \times \overline{PQ}| = \sqrt{5}$. Assim,

$$\text{distância} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

d Já observamos que $A = M = (11/6, 1/2, 2/6)$.

---

3)

(a) Considere as retas

$$r_1 = (5 + 2\,t, -1 - t, 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 = (4 - t, -5 + 2\,t, -1 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estude se as retas r_1 e r_2 se interceptam ou são reversas. Caso se interceptem, determine o ponto de interseção. Caso sejam reversas, determine a distância entre as duas retas.

(b) Considere as retas

$$s_1 = (1 + c\,t, d + t, 6 + 3\,t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$s_2 = (t, a + 2\,t, 1 + b\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine explicitamente valores de **a**, **b**, **c** e **d**, para que as retas se interceptem no ponto $(1, 4, 3)$.

(c) Considere as retas

$$\ell_1 = (1 + t, 1 - t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\ell_2 = (1 + 2\,t, 1 + t, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine todos os pontos da reta ℓ_2 cuja distância à reta ℓ_1 é $2\sqrt{6}$.

Resposta:

a) Observe que as retas não são paralelas. Portanto, as retas serão reversas se sua distância for diferente de zero, caso contrário serão concorrentes. Para determinar a distância escolhemos pontos $P_1 = (5, -1, 2)$ em r_1 e $P_2 = (4, -5, -1)$ em r_2 e os vetores diretores de r_1, $v_1 = (2, -1, 0)$, e de r_2, $v_2 = (-1, 2, 1)$. A distância entre as retas é dada por

$$\text{distância} = \frac{|\overline{P_1P_2} \cdot (v_1 \times v_2)|}{|v_1 \times v_2|}.$$

Temos

$$(2, -1, 0) \times (-1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 3).$$

O módulo deste vetor é $\sqrt{14}$.

Temos

$$\overline{P_1P_2} = (-1, -4, -3).$$

Portanto,

$$\overline{P_1P_2} \cdot (v_1 \times v_2) = (-1,-4,-3) \cdot (-1,-2,3) = 1+8-9 = 0.$$

Portanto, a distância é zero e as retas são concorrentes.

Para determinar o ponto de interseção devemos resolver o sistema (observe que os parâmetros das retas são diferentes...)

$$5+2\,t = 4-s, \quad -1-t = -5+2\,s, \quad 2 = -1+s.$$

Da última equação obtemos $s = 3$. Substituindo na segunda,

$$-t = -4+6, \quad t = -2.$$

Estas soluções são compatíveis com a primeira equação:

$$5+2\,(-2) = 4-(3).$$

Portanto, o sistema tem solução que é o ponto de interseção: $(1,1,2)$.

b) O ponto $(1,4,3)$ deve pertencer a $s_1 = (1+c\,t, d+t, 6+3\,t)$. Portanto,

$$3 = 6+3\,t$$

quando $t = -1$. Substituindo na primeira e segunda equações:

$$1 = 1+c\,(-1), \quad c = 0$$

e

$$4 = d-1, \quad d = 5.$$

Analogamente, $(1,4,3)$ pertence a $s_2 = (t, a+2\,t, 1+b\,t)$. A primeira coordenada implica que $t = 1$. Substituindo outras equações:

$$4 = a+2, \quad a = 2$$

e

$$3 = 1+b, \quad b = 2.$$

Portanto,

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 0, \quad d = 5.$$

c) A distância do ponto $A_t = (1+2\,t, 1+t, 1-t)$ da reta ℓ_2 a reta ℓ_1 é obtida como segue. Escolhemos o ponto $P = (1,1,1)$ (a interseção das retas) e consideramos o produto vetorial do vetor $\overline{PA_t} = (2\,t, t, -t)$ e o vetor diretor de ℓ_1, $v = (1, -1, 1)$,

$$\overline{PA_t} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\,t & t & -t \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = t\,(0, -3, -3).$$

Então

$$\text{distância}(A_t, \ell_1) = \frac{|t\,(0, -3, -3)|}{|(1, -1, 1)|} = \frac{|t|\,\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = |t|\,\sqrt{6}.$$

Queremos

$$|t|\,\sqrt{6} = 2\,\sqrt{6}.$$

Portanto,

$$t = \pm 2.$$

Assim obtemos dois pontos

$$(-3, -1, 3), \quad \text{e} \quad (5, 3, -1).$$