Álgebra Linear I - Aula 24

1. Caracterização das matrizes simultaneamente ortogonais e simétricas.
2. Potência de uma matriz.

Roteiro

1 Caracterização das matrizes simultaneamente ortogonais e simétricas

1.1 Matrizes 2×2

Proposição: *Uma matriz M representa um espelhamento se, e somente se, é ortogonal, simétrica e determinante -1.*

Já sabemos que uma matriz de espelhamento é ortogonal, simétrica e tem determinante -1. Vejamos o recíproco.

Observe que se M é simétrica tem autovalores reais λ e σ. Como é ortogonal, os autovalores são ± 1. Como o determinante é -1, os autovalores são 1 e -1. Sejam u e v os autovetores associados a 1 e -1. Finalmente, como M é simétrica, u e v são ortogonais. Conclusão: M representa o espelhamento na reta paralela a u que contém a origem.

O raciocínio anterior fornece o seguinte

Proposição: *A matriz M representa um espelhamento se, e somente se, é ortogonal, simétrica e tem traço 0.*

Em outras palavras, uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica tem determinante -1 se, e somente se, seu traço é 0.

Observe que uma matriz ortogonal e simétrica de determinante 1 é a identidade ou menos a identidade (no primeiro caso o traço é 2 e no segundo -2).

Suponha, por exemplo que o determinante é 1. Então os autovalores são 1 de multiplicidade dois ou (-1) de multiplicidade 2. Vejamos o primeiro caso, teriamos

$$M = P Id P^{-1} = P P^{-1} = Id.$$

Exemplo: Seja M uma matriz 2×2 ortogonal é simétrica tal que $M^2 = M$. Determine M.

Se M é ortogonal e simétrica existem três possibilidades: M representa um espelhamento, a identidade ou menos a identidade. Nos primeiro e no último caso, $M^2 = Id \neq M$. Logo a única possibilidade é M ser a identidade.

1.1.1 Projeções ortogonais

Aproveitamos para, no caso 2×2, caracterizar as projeções ortogonais.

Proposição: *Uma matriz, M 2×2, representa uma projeção ortogonal se, e somente se, é simétrica, tem determinante 0 e traço 1.*

Observe que se M é simétrica tem autovalores reais λ e σ. Como o determinante é zero, um autovalor é nulo, por exemplo $\sigma = 0$. Como o traço é 1, $\lambda = 1$. Sejam u e v os autovetores associados a 1 e 0. Como M é simétrica, u e v são ortogonais. Conclusão: M representa a projeção ortogonal na reta paralela a u que contem a origem.

Exemplo: A matriz M,

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

representa a projeção ortogonal na reta (t, t), $t \in \mathbb{R}$.

1.2 Matrizes 3×3.

Considere M uma matriz ortogonal e simétrica. Os autovalores de M são 1 e/ou -1.

Suponha que o determinante é 1. Existem as seguintes possibilidades:

- traço 3: é a identidade,
- traço 1: é um espelhamento respeito a uma reta.

Como no exemplo visto acima, temos que se o traço é 3 então $M = PIdP^{-1} = Id$.

Vejamos o segundo caso. Como é simétrica tem autovalores reais. Como é ortogonal são 1 ou -1. Como o determinante é 1 há duas possibilidades: 1 com multiplicidade 3 (traço 3 e é a identidade), ou 1 com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade 2 (traço -1). Em tal caso temos um espelhamento respeito a reta que contém a origem paralela a autovetor associado a 1.

Considere M uma matriz ortogonal e simétrica. Suponha que o determinante é -1.

Existem as seguintes possibilidades:

- traço -3: é menos identidade,
- traço 1: é um espelhamento respeito a um plano.

Como é simétrica tem autovalores reais. Como é ortogonal são 1 ou -1. Como o determinante é -1 há duas possibilidades: -1 com multiplicidade 3 (traço -3 e é menos a identidade), ou -1 com multiplicidade 1 e 1 com multiplicidade 2 (traço 1). Em tal caso temos um espelhamento respeito ao plano que contém a origem e é normal ao autovetor associado a -1.

Exemplo: Seja M uma matriz 3×3 ortogonal é simétrica tal que $M^2 = M$. Determine M. Faça o mesmo no caso $M^3 = M$ e seu determinante é 1.

No primeiro caso a resposta é a identidade. No segundo caso pode ser a identidade ou um espelhamento respeito a uma reta.

2 Potência de uma matriz

Nesta seção explicaremos como calcular a potência n-ésima de uma matriz diagonalizável.

Primeiro observe que

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Portanto, se A é diagonalizável e D é sua forma diagonal, temos

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}.$$

Onde calcular D^2 é muito simples.

Em geral, e indutivamente,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Exemplo: Calcular A^{10} onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observe que A é diagonalizável, com forma diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Também,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{10} = P \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exemplo: Considere as matrizes

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina a matriz $C = E\,A\,E$.

- Calcule E^2.
- Encontre a forma diagonal de A.
- Calcule C^{15}.

Resposta: Temos

$$E^2 = E\,E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz A é simétrica é diagonalizável. Escreveremos $A = B\,D\,B^{-1}$, onde D é diagonal e B ortogonal. Calculemos agora D e B.

O polinômio caraterístico de A é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

e seus autovalores são 4 e -2.

A forma diagonal de A é

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A matriz B terá por colunas autovetores (unitários) de A l.i.. O autovetor $u = (x, y)$ associado a 3 verifica $-3x + 3y = 0$, $x = y$, $u = (1, 1)$ ou $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ já normalizado. O outro autovetor será perpendicular, ou seja $w = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. A matriz B é

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente para calcular C^{15} observavos que $B = B^t = B^{-1}$ escrevemos

$$C^2 = (E\,B\,D\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E) = E\,B\,D\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = -E\,B\,D^2\,B\,E.$$

Também temos

$$C^3 = -(E\,B\,D^2\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E) = -E\,B\,D^2\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = E\,B\,D^3\,B\,E.$$

Finalmente,

$$C^4 = (E\,B\,D^3\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E = E\,B\,D^3\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = -(E\,B\,D^4\,B\,E).$$

Portanto, temos que

$$C^{2k} = -E\,B\,D^{2k}\,B^{-1}\,E, \quad C^{2k+1} = E\,B\,D^{2k+1}\,B^{-1}\,E$$

Logo,

$$B^{15} = E\,B\,D^{15}\,B^{-1}\,E.$$

Portanto,

$$C^{15} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{15} & 0 \\ 0 & (-2)^{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

onde a primera e a última matriz correspondem aos produtos $E\,B$ e $B\,E$.