Álgebra Linear I - Aula 23

1. Matrizes 2×2 ortogonais e simétricas.
2. Projeções ortogonais.
3. Matrizes ortogonais e simétricas 3×3.

Roteiro

1 Matrizes simultaneamente ortogonais e simétricas 2×2

Propriedade 1.1. *Considere uma matriz (2×2) M ortogonal e simétrica. Existem três possibilidades: $M = Id$, $M = -Id$ ou M representa (na base canônica) um espelhamento.*

Prova: Considere M uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica. Como M é simétrica seus autovalores são reais, e como é ortogonal seus autovalores são 1 e/ou -1. Portanto, existem três possibilidades para os autovalores:

1. 1 de multiplicidade dois;
2. 1 e -1 (simples),
3. (-1) de multiplicidade dois.

Em cada caso, obtemos as seguintes formas diagonais D de M:

1. 1 de multiplicidade dois
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
2. 1 e -1 (simples),
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. (-1) de multiplicidade dois.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como M é simétrica podemos escrever M

$$M = P\, D\, P^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

onde P é uma matriz ortogonal (portanto, $P^{-1} = P^t$).

Se $D = Id$ temos

$$M = P\, D\, P^{-1} = P\, Id\, P^{-1} = P\, P^{-1} = Id.$$

Se $D = -Id$ temos

$$M = P\, D\, P^{-1} = P\,(-Id)\, P^{-1} = -P\, P^{-1} = -Id.$$

Falta considerar o caso (2) (os autovalores são 1 e -1). Escolhemos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e observamos que os vetores coluna de P são os autovetores de M associados a 1 e -1 Como estes vetores são ortogonais, M representa o espelhamento na reta de vetor diretos (a_1, a_2), o autovetor associado a 1. $\square$

Observação 1. *Da prova da Proposição 1.1 obtemos que se uma matriz (2×2) M representa (na base canônica) um espelhamento então*

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^t,$$

onde P é ortogonal. Assim M é o produto de três matrizes ortogonais e é ortogonal. Seu determinante é o produto dos determinantes. Como P é ortogonal, $\det(P) = \pm 1$. *Assim obtemos que*

$$\det M = \det(P) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \det(P^t) = \det(P)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Portanto, a matriz M tem determinante -1.

De fato, é possivel obter um pouco mais:

Propriedade 1.2. *Uma matriz (2×2) M representa (na base canônica) um espelhamento se, e somente se, é ortogonal e simétrica e tem determinante* -1.

Prova: Acabamos de ver que se uma matriz M representa um espelhamento ela é ortogonal e tem determinante -1. Falta ver que ela é simétrica. Para isto é suficiente observar que possui uma base ortogonal de autovetores: um vetor diretor da reta de espelhamento (correspondente ao autovalor 1) e seu vetor normal (correspondente ao autovalor -1).

Vejamos o recíproco. Observe que se M é simétrica então tem autovalores reais λ e σ. Como é ortogonal, os autovalores são necessariamente ± 1. Como o determinante é -1 a única possibilidade é que os autovalores sejam 1 e -1.

Sejam u e v os autovetores associados a 1 e -1. Como M é simétrica, u e v são ortogonais. Assim a matriz M representa o espelhamento na reta paralela a u que contém a origem. $\square$

O raciocínio anterior também fornece o seguinte resultado:

Propriedade 1.3. *A matriz (2×2) M representa (na base canônica) um espelhamento se, e somente se, é ortogonal, simétrica e tem traço* 0.

Em outras palavras, uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica tem determinante -1 se, e somente se, seu traço é 0.

Observe que há matrizes ortogonais cujo traço é zero que não representam espelhamentos: as rotações de ângulo $\pi/2$ e $(3\pi)/2$ radianos. Neste caso, o determinante é 1.

Observe que uma matriz ortogonal e simétrica de determinante 1 é a identidade ou menos a identidade (no primeiro caso o traço é 2 e no segundo -2). Suponha, por exemplo que o determinante é 1. Então os autovalores são 1 de multiplicidade dois ou (-1) de multiplicidade 2. No primeiro caso temos

$$M = PIdP^{-1} = PP^{-1} = Id.$$

Complete v. o segundo caso.

Exercício 1. *Seja M uma matriz 2×2 ortogonal é simétrica tal que $M^2 = M$. Determine M.*

Resposta: Se M é ortogonal e simétrica existem três possibilidades: M representa um espelhamento, a identidade ou menos a identidade. Nos casos primeiro e último, $M^2 = Id \neq M$. Logo, a única possibilidade é M ser a identidade. □

2 Projeções ortogonais

Aproveitamos para, no caso 2×2, caracterizar as projeções ortogonais.

Propriedade 2.1. *Seja M uma matriz 2×2. A matriz M representa (na base canônica) uma projeção ortogonal se, e somente se, é simétrica, tem determinante 0 e traço 1.*

Prova: Observe que se M representa uma projeção ortogonal então é simétrica (possui uma base ortogonal de autovetores). Como os autovalores são 0 e 1, obtemos que o traço é 1 e o determinante é zero.

Para o recíproco, observe que se M é simétrica, tem autovalores reais λ e σ. Como o determinante é zero, um autovalor é nulo, por exemplo $\sigma = 0$. Como o traço é 1, $\lambda = 1$. Sejam u e v os autovetores associados a 1 e 0. Como M é simétrica, u e v são ortogonais. Conclusão: M representa a projeção ortogonal na reta paralela a u que contém a origem. □

Exemplo 1. *A matriz M,*

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

representa a projeção ortogonal na reta (t, t), $t \in \mathbb{R}$.

3 Matrizes simultaneamente ortogonais e simétricas 3×3.

Considere M uma matriz 3×3 ortogonal e simétrica. Como é simétrica seus autovalores são reais, e como é ortogonal seus autovaloressão 1 e/ou -1. Existem quatro possibilidades para os autovalores:

1. 1 de multiplicidade três;

2. 1 de multiplicidade dois e -1 simples,

3. 1 simples e (-1) de multiplicidade dois; e

4. (-1) de multiplicidade três.

Em cada caso, obtemos as seguintes formas diagonais de M:

1. 1 de multiplicidade três
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. 1 de multiplicidade dois e -1 simples,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. 1 simples e (-1) de multiplicidade dois,
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

4. (-1) de multiplicidade três,
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz M é simétrica podemos escrever M
$$M = P\,D\,P^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$
onde P é uma matriz ortogonal (portanto, $P^{-1} = P^t$) e são autovetores de M. Escrevemos
$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3), \quad c = (c_1, c_2, c_3).$$

Observamos que como $\{a, b, c\}$ é uma base ortonormal (pois P é uma matriz ortogonal) temos $a \times b = \pm c$.

Como no caso das matrizes 2×2, de $D = Id$ então M é a identidade e se $D = -Id$ então $M = -Id$. Portanto, excluidas permutações na diagonal faltam considerar dois casos para a forma diagonal de M:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se escolhemos D_1 temos

- a e b são autovetores associados a 1. Consideramos o plano vetorial paralelo a a e b. Um vetor normal do plano π paralelo a e b é o vetor $a \times b = \pm c$. Assim $\pi\colon c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z = 0$. Observe que para todo vetor w de π se verifica $M(w) = w$ (justifique!).

- c é um autovetor cujo autovalor é -1.

Portanto, neste caso, M representa um espelhamento no plano π.

Finalmente, se escolhemos D_2 temos

- a e b são autovetores associados a -1. Consideramos o plano vetorial paralelo a a e b. Um vetor normal do plano π é o vetor $a \times b = \pm c$. Assim $\pi\colon c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z = 0$. Observe que para todo vetor w de π se verifica $M(w) = -w$ (justifique!).

- c é um autovetor cujo autovalor é 1.

Portanto, neste caso, M representa um espelhamento na reta $(c_1\, t, c_2\, t, c_3\, t)$.

Podemos resumir os resultados acima como segue (no texto a seguir P é uma matriz ortogonal):

1. 1 de multiplicidade três: neste caso M é a identidade e

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t.$$

Neste caso, o traço é 3 e o determinante 1.

2. 1 de multiplicidade dois e -1 simples: neste caso M representa um espelhamento em um plano e é se escreve da forma

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^t.$$

Portanto, M tem traço 1 e determinante -1.

3. 1 simples e (-1) de multiplicidade dois: neste caso M representa um espelhamento em uma reta e é se escreve da forma

$$M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t.$$

Portanto, M tem traço -1 e determinante 1.

4. (-1) de multiplicidade três: neste caso M é a identidade e

$$M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^t.$$

Neste caso, o traço é -3 e o determinante -1.

Observe que o traço determina completamente as matrizes simultaneamente ortogonais e simétricas:

1. identidade (traço 3),
2. menos idedentidade (traço -3),
3. espelhamento em relação a um plano (traço 1), e
4. espelhamento em relação a uma reta (traço -1).

Exemplo 2. *Seja M uma matriz 3×3 ortogonal e simétrica tal que $M^2 = M$. Determine M. Faça o mesmo no caso $M^3 = M$ quando o determinante de M é 1.*

Resposta: No primeiro caso a resposta é a identidade (nos outros casos $M^2 = Id \neq M$). No segundo caso pode ser a identidade ou um espelhamento com relação a uma reta. Complete os detalhes (faça uma lista das possibilidades... e faça eliminações!). $\square$