Álgebra Linear I - Aula 21

1. Matriz de Mudança de Base.
2. Bases Ortonormais.
3. Matrizes Ortogonais.

1 Matriz de Mudança de Base

Os próximos problemas que estudaremos são os seguintes (na verdade são o mesmo problema).

- Considere uma transformação linear T e uma base β. Suponha conhecida a matriz $[T]_\beta$ de T na base β. Queremos obter a matriz de T na base canônica (ou em outra base). Para simplificar notação, escreveremos $[T]_e$ a matriz na base canônica.
- Considere duas bases β e γ e um vetor v, conhecidas as coordenadas de v na base β, $(v)_\beta$, determinar as coordenadas do vetor v na base γ, $(v)_\gamma$.

A respeito do primeiro problema, veremos que as matrizes $[T]_e$ e $[T]_\beta$ são semelhantes,

$$[T]_e = P\,[T]_\beta\,P^{-1}.$$

O problema principal é determinar P. As matrizes P e P^{-1} são as chamadas matrizes de *mudança de base.* Aplicando P^{-1} a um vetor v na base canônica obtemos as coordenadas de v na base β, assim P^{-1} e a *matriz de mudança da base canônica à base* β. Analogamente, aplicando P a um vetor w na base β obtemos as coordenadas de w na base canônica, portanto, P e a *matriz de mudança da base* β *à base canônica.*

Para evitar notação mais pesada, resolveremos este problema no caso de transformações lineares de $\mathbb{R}^2$. Em dimensões superiores o raciocínio é idêntico.

Considere a base $\beta = \{u, v\}$ e a base canônica $e = \{(1,0), (0,1)\}$. Suponha que $u = (u_1, u_2)_e$ e $v = (v_1, v_2)_e$ (coordenadas de u e v na base canônica).

Dado um vetor w com $(w)_\beta = (a, b)$ queremos calcular $(w)_e$. Isto é muito simples, temos

$$w = a\,u + b\,v = a\,(u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}) + b\,(v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}) = (a\,u_1 + b\,v_1)\,\mathbf{i} + (a\,u_2 + b\,v_2)\,\mathbf{j}.$$

Isto é,

$$(w)_e = (a', b') = (a\,u_1 + b\,v_1, a\,u_2 + b\,v_2).$$

Portanto, em forma matrizial,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras, a matriz M de mudança da base β para a base canônica é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base β na base canônica.

Observe que a matriz de mudança da base canônica e à base β é a matriz inversa de M.

Finalmente, observe que as matrizes $P = M$ e $P^{-1} = M^{-1}$ verificam

$$[T]_e = P\,[T]_\beta\,P^{-1}.$$

Complete os detalhes.

Exemplo 1. *Considere a projeção ortogonal* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *na reta* $x + y = 0$. *Escreva* $[T]_e = P^{-1}DP$, *onde* D *é diagonal.*

Prova: Como D e T tem os mesmos autovalores, os autovalores de D devem ser 0 e 1. Como D é diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal. Portanto, uma das duas escolhas para D é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a outra possibilidade? Também sabemos que se consideramos a base

$$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

formada por dois autovetores de T então

$$[T]_\beta = D.$$

Sabemos que

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1. \end{pmatrix}, \quad [P]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2. \end{pmatrix}.$$

Verifique que PDP^{-1} resulta em $[T]_e$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2. \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Considere a transformação linear T que verifica*

$$T(1,1,0) = (2,2,0), \quad T(0,1,1) = (0,-1,-1), \quad T(1,0,1) = (3,0,3).$$

Escreva

$$[T]_e = P\,D\,P^{-1},$$

onde D é diagonal. Determine também $[T]_e$.

Prova: Temos que

$$\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

é uma base de autovetores de T. Sabemos que

$$[T]_\beta = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Também sabemos que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando $[P]^{-1}$ (por exemplo, pelo método de Gauss) obtemos

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
[T_e] &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Confira que ao aplicar a última matriz aos vetores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ obtemos $(2,2,0)$, $(0,-1,-1)$ e $(3,0,3)$, o que confirma que o resultado é correto. $\square$

2 Bases Ortonormais

Lembre que uma base β é *ortogonal* se está formada por vetores ortogonais entre si: para todo par de vetores distintos u e v da base β se verifica que $u \cdot v = 0$.

Uma base γ é *ortonormal* se é ortogonal e todo vetor da base é um vetor unitário (ou seja, $u \cdot u = 1$ para todo vetor de γ).

Como já vimos, calcular as coordenadas de um vetor em uma base ortogonal é muito simples (mais ainda se a base é ortonormal). Suponha que estamos em $\mathbb{R}^3$ e que $\beta = \{u, v, w\}$ é uma base ortonormal. Queremos determinar as coordenadas de um vetor ℓ na base β, ou seja

$$(\ell)_\beta = (a, b, c), \quad \ell = a\,u + b\,v + c\,w.$$

Para determinar a considere $\ell \cdot u$,

$$\ell \cdot u = (a\,u + b\,v + c\,w) \cdot u = a\,(u \cdot u) + b\,(u \cdot v) + c\,(u \cdot w).$$

Observe que, como a base é ortonormal, $u \cdot u = 1$, $u \cdot v = 0 = u \cdot w$. Logo

$$a = \ell \cdot u.$$

Analogamente obtemos,

$$b = \ell \cdot v, \qquad c = \ell \cdot w.$$

Exercício 1. *Encontre uma base ortonormal β que contenha dois vetores paralelos a $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$. Obtida a base β, determine as coordenadas do vetor $(1,2,3)$ em dita base.*

Resposta: O terceiro vetor da base deve ser ortogonal a $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$, portanto, é paralelo a $(1,1,1)\times(1,-1,0)$, isto é, paralelo a $(1,1,-2)$. Uma possível base β (existem muitas possibilidades) é

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}.$$

As coordenadas de $(1,2,3)$ na base β são (a,b,c) onde

$$\begin{aligned} a &= (1,2,3)\cdot(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3}, \\ b &= (1,2,3)\cdot(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = -1/\sqrt{2}, \\ c &= (1,2,3)\cdot(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) = -3/\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Obtemos assim as coordenadas. □

3 Matrizes ortogonais

Dada uma matriz quadrada M sua *transposta,* denotada M^t, é uma matriz cujas linhas são as colunas de M, ou seja, se $M = (a_{i,j})$ e $M^t = (b_{i,j})$ se verifica $b_{j,i} = a_{i,j}$.

Definição 1 (Matriz ortogonal)**.** *Uma matriz M é* ortogonal *se é inversível e $M^{-1} = M^t$, ou seja,*

$$MM^t = M^tM = Id.$$

Observe que se M é ortogonal então sua transposta também é ortogonal (veja que $(M^t)^{-1} = M$). Portanto, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedade 3.1. *Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal (de fato, isto é uma definição geométrica alternativa de matriz ortogonal).*

Prova: Para simplificar a notação veremos a afirmação para matrizes 2×2. Seja M uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

$$
\begin{aligned}
Id &= M^t M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a + b\,b & a\,c + b\,d \\ a\,c + b\,d & c\,c + d\,d \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$u \cdot u = v \cdot v = 1, \quad u \cdot v = 0,$$

e u e v formam uma base ortonormal. $\square$

De fato, o argumento anterior mostra o seguinte:

Propriedade 3.2. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.*

Multiplicando $M M^t$, v. obterá a mesma afirmação para os vetores linha:

Propriedade 3.3. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores linha formam uma base ortonormal.*

Observação 1. *O fato anterior implica que a matriz de uma rotação ou de um espelhamento (na base canônica) é uma matriz ortogonal. Também implica que a matriz de uma projeção não é ortogonal (em nenhuma base).*

3.1 Conclusão

Quando uma transformação linear T tem uma base ortonormal β de autovetores o processo de diagonalização se simplifica substancialmente: existe uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que

$$[T] = P\,D\,P^t,$$

onde P é a matriz cujos vetores coluna são os vetores da base β.