Álgebra Linear I - Aula 18

1. Matrizes semelhantes.

1 Matrizes semelhantes

Definição 1 (Matrizes semelhantes)**.** *Considere duas matrizes quadradas A e B. A matriz A é* semelhante *à matriz B se, e somente se, existe uma matriz inversível P tal que*

$$A = PBP^{-1}.$$

Observe que se A é semelhante a B então B é semelhante a A: multiplicando a expressão anterior por P^{-1} à esquerda e por P à direita, temos

$$P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P = B.$$

Logo

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1} = Q\,B\,Q^{-1},$$

onde $Q = P^{-1}$. Portanto, diremos que as matrizes A e B são *semelhantes.*

Propriedade 1.1. *Duas matrizes quadradas semelhantes A e B verificam as seguintes propriedades:*

1. $\det(A) = \det(B)$,
2. *A é inversível se, e somente se, B é inversível,*
3. *A e B têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade (mas, em geral, não têm os mesmos autovetores),*
4. *A e B têm o mesmo polinômio característico,*
5. *A e B têm o mesmo traço.*

Prova: Suponhamos que A e B são semelhantes e que $A = P\,B\,P^{-1}$.

A afirmação sobre os determinantes segue do fato do determinante do produto de matrizes ser o produto dos determinantes, portanto,

$$\det(A) = \det(P)\,\det(B)\,\det(P^{-1}) = \det(P)\,\det(B)\,\frac{1}{\det(P)} = \det B.$$

A afirmação sobre a inversibilidade decorre da propriedade sobre os determinantes: A é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Portanto, se A e B são semelhantes $\det(A) = 0$ se, e somente se, $\det(B) = 0$.

Vejamos que se λ é um autovalor de B e u é um autovetor de B associado a λ, então $P(u)$ é um autovetor de A associado ao mesmo autovalor λ. Observe primeiro que como P é inversível e $u \neq \bar{0}$, então, $P(u) \neq \bar{0}$. Temos,

$$A(P(u)) = P\,B\,P^{-1}(P(u)) = P\,B(u) = P(\lambda\,u) = \lambda\,P(u),$$

e, como $P(u) \neq \bar{0}$, $P(u)$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Vejamos agora que os polinômios característicos P_A e P_B de duas matrizes semelhantes A e B são iguais. O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) \; &= \det(A - \lambda\,I) = \det(P\,B\,P^{-1} - P(\lambda\,I)\,P^{-1}) = \\ &= \det(P\,(B - \lambda I)\,P^{-1}) = \det(P)\,\det(B - \lambda\,I)\,\det P^{-1} = \\ &= \det(B - \lambda\,I) = p_B(\lambda), \end{aligned}$$

logo os polinômios característicos são iguais.

A igualdade dos polinômios característicos implica que as matrizes A e B têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades. Como o traço de uma matriz é igual à soma dos autovalores contados com multiplicidade, as matrizes A e B têm o mesmo traço. □

1.1 Exemplos e comentários

Observamos que se as matrizes A e B são semelhantes, e as matrizes B e C também são semelhantes, então, A e C também são semelhantes. Observe que

$$A = PBP^{-1}, \quad B = QCQ^{-1},$$

onde (obviamente) P e Q são inversíveis. Portanto,

$$A = P\,B\,P^{-1} = P\,(Q\,C\,Q^{-1})\,P^{-1} = (P\,Q)\,C\,Q^{-1}\,P^{-1}.$$

Como

$$(P\,Q)^{-1} = Q^{-1}\,P^{-1},$$

temos

$$A = (P\,Q)\,C\,(P\,Q)^{-1},$$

e A e C são semelhantes.

Observe que se A e B são inversíveis e semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} também são semelhantes:

$$A = P\,B\,P^{-1},$$

logo

$$A^{-1} = (P\,B\,P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}\,B^{-1}\,P^{-1} = P\,B^{-1}\,P^{-1}.$$

Usando o fato de que matrizes semelhantes têm o mesmo traço, temos que a matriz de uma projeção em um plano de $\mathbb{R}^3$ não pode ser semelhante à matriz de uma projeção em uma reta. Analogamente, matrizes de projeções em um plano nunca são semelhantes a matrizes de espelhamentos. Embora as matrizes de uma projeção em uma reta de $\mathbb{R}^3$ e de um espelhamento em um plano tenham traço 1, não são semelhantes, pois têm diferentes autovalores (ou diferentes determinantes).

Exemplo 1. *Veja quais das matrizes a seguir são semelhantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Temos

$$\operatorname{tr}(A) = 5, \quad \operatorname{tr}(B) = 5, \quad \operatorname{tr}(C) = 1, \quad \operatorname{tr}(D) = 1.$$

Portanto, as únicas matrizes que podem ser semelhantes são as matrizes A e B e as matrizes C e D.

Também temos

$$\det(A) = 5, \quad \det(B) = 5, \quad \det(C) = 0, \quad \det(D) = -2.$$

Ou seja, A e B podem ser semelhantes, mas C e D não podem ser.

O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

O polinômio característico de B é

$$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

Portanto, as matrizes A e B ainda podem ser semelhantes. Concluiremos a prova na próxima seção. $\square$

1.2 Construção da matriz de semelhança

Observe que para verificar que as duas matrizes A e B do Exemplo 1 são semelahantes devemos encontrar uma matriz inversível T tal que $A = T^{-1}\, B\, T$. A seguir obteremos essa matriz.

Em primeiro lugar, temos que os autovalores de A e de B são:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, as matrizes têm dois autovalores reais diferentes.

Sejam v_A e w_A dois autovetores de A associados a

$$\lambda = (5 + \sqrt{5})/2, \qquad \text{e} \qquad \sigma = (5 - \sqrt{5})/2,$$

respectivamente.

Observe que $\{v_A, w_A\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$: os vetores v_A e w_A são autovetores associados a autovalores diferentes, portanto são l.i., e dois vetores l.i. formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere agora dois autovetores v_B e w_B de B associados a λ e σ. Observe que raciocinando como acima temos que que $\{v_B, w_B\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como segue,

$$T(v_A) = v_B, \quad T(w_A) = w_B.$$

Como uma transformação linear está totalmente determinada conhecidas as imagens dos vetores de uma base, a transformação linear T está única e totalmente determinada.

Seja $[T]$ a matriz de T. Afirmamos que esta matriz é inversível. Isto pode ser obtido observando que o determinante de $[T]$ é não nulo (justifique e complete). A seguir, construiremos explicitamente T^{-1}.

De fato, T^{-1} é a transformação linear S determinada por

$$S(v_B) = v_A, \quad S(w_B) = w_A.$$

Vejamos que $S \circ T = Id$. Considere qualquer vetor u, devemos ver que

$$S \circ T(u) = u.$$

Como $\{v_A, w_A\}$ é uma base, dado qualquer vetor u podemos escreve-lo da forma $u = \alpha\, v_A + \gamma\, w_A$. Então,

$$\begin{aligned} S \circ T(u) \quad &= S(T(\alpha\, v_A + \gamma\, w_A)) = S(\alpha\, T(v_A) + \gamma\, T(w_A)) = \\ &= S(\alpha\, v_B + \gamma\, w_B) = \alpha\, S(v_B) + \gamma\, S(w_B) = \\ &= \alpha\, v_A + \gamma\, w_A = u, \end{aligned}$$

como queremos provar.

Vejamos agora que

$$A = T^{-1}\, B\, T.$$

Para provar esta afirmação é suficiente ver que estas duas matrizes coincidem em uma base, por exemplo, na base $\{v_A, w_A\}$. Veremos que as imagens de v_A são iguais (o caso w_A é idêntico). Temos

$$A(v_A) = ((5 + \sqrt{5})/2)v_A.$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} T^{-1}\, B\, T(v_A) \quad &= T^{-1}\, B(v_B) = T^{-1}((5 + \sqrt{5})/2)v_B) = \\ &= (5 + \sqrt{5})/2)T^{-1}(v_B) = (5 + \sqrt{5})/2)v_A, \end{aligned}$$

como queremos provar.

Terminaremos este exemplo com algum comentários. Em primeiro lugar observamos que a matriz $[T]$ é um caso particular de *matriz de mudança de base* que veremos nas próximas aulas.

Os argumentos acima mostram o seguinte:

Sejam A e B duas matrizes (por exemplo, 3×3) que têm os mesmos autovalores (todos reais e diferentes). Então, A e B são semelhantes.

Suponhamos que os autovalores são λ, σ e γ. A ideia é repetir o argumento do exemplo anterior. Considere autovetores de A, digamos v_A, u_A, w_A associados aos autovalores λ, σ e γ, respetivamente, e autovetores de B, digamos v_B, u_B, w_B associados a λ, σ e γ. Como os autovalores são diferentes temos que

$$\beta_A = \{v_A, u_A, w_A\}, \qquad \beta_B = \{v_B, u_B, w_B\}$$

são duas bases de $\mathbb{R}^3$. Considere agora transformação linear T que verifica

$$T(v_A) = v_B, \quad T(u_A) = u_B, \quad T(w_A) = w_B.$$

Como β_A é uma base, T está totalmente definida.

Exatamente como no exemplo anterior temos que

$$A = T^{-1}\, B\, T.$$

Complete os detalhes raciocinando como no caso anterior.

Muita atenção (!), na frase anterior o adjetivo *diferente* é essencial. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

têm o mesmo determinante (4), o mesmo traço (4), o mesmo polinômio característico ($(2-\lambda)^2$), e os mesmos autovalores (2, de multiplicidade 2), mas não são semelhantes. Isto é devido a que o autovalor 2 tem multiplicidade dois. A seguir estudaremos este exemplo.

As matrizes A e B não são semelhantes pois A possui uma base de autovetores (a base $\{(1,0),(0,1)\}$) e a matriz B não tem uma base de autovetores (somente é possível encontrar - no máximo - um autovetor l.i., por exemplo $(0,1)$). Se A e B fossem semelhantes,

$$B = PAP^{-1},$$

então $\{P(1,0)$ e $P(0,1)\}$ formariam uma base de autovetores de B, que sabemos que não existe (!).

Completaremos sucintamente os detalhes das afirmações acima.

- Como P é inversível, transforma vetores l.i. em vetores l.i., portanto, $\{P(1,0), P(0,1)\}$ é uma base.

- Em tal caso,

  $$B(P(1,0)) = P\,A\,P^{-1}(P(1,0)) = P\,A(1,0) = P(2,0) = 2\,P(1,0),$$

  portanto $P(1,0)$ é autovetor de B. Analogamente, $P(0,1)$ é outro vetor de B. Portanto, B possui uma base de autovetores, o que é absurdo.