Álgebra Linear I - Aula 17

1. Autovalores e autovetores.
2. Cálculo dos autovetores e autovalores. Polinômio característico.

Roteiro

1 Autovetores e autovalores de uma transformação linear

Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definição 1 (Autovetores e autovalores)**.** *Dizemos que um vetor não nulo v é um* autovetor *de T se existe um número real λ tal que*

$$T(v) = \lambda\, v.$$

Em tal caso, dizemos que λ é o autovalor associado ao autovetor v.

Observe que se v é um autovetor, então σv, $\sigma \neq 0$, também é um autovetor com o mesmo autovalor associado:

$$T(\sigma\, v) = \sigma\, T(v) = \sigma\, \lambda\, v = \lambda\, (\sigma\, v).$$

2 Cálculo dos autovetores e autovalores. Polinômio característico

Observe que se um vetor $v \neq \bar{0}$ é um autovetor de T então $T(v) = \lambda\, v$, ou seja

$$(T - \lambda I)(v) = \bar{0}.$$

Isto implica que a transformação linear $(T - \lambda I)$ não é inversível e, portanto,

$$\det(T - \lambda I) = 0.$$

Isto significa que o cálculo de autovetores e autovalores é um processo paralelo: primeiro determinaremos os autovalores (possíveis) e a seguir os autovetores (associados ao autovalor).

Observe que os autovalores λ da transformação linear T devem verificar

$$\det(T - \lambda I) = 0.$$

Portanto, a primeira etapa é encontrar todos os possíveis valores de λ que verificam essa condição.

Para fixar idéias, suponhamos que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$. Então, $[T - \lambda I]$ é uma matriz 3×3. Observe que

$$\det(T - \lambda I) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

onde $a_3 = \det(T)$. Portanto, como temos um polinômio de grau 3, existe uma raiz real do polinômio anterior, que corresponde a um autovalor.

Definição 2. *Dizemos que* $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ *é o* polinômio característico de T.

Propriedade 2.1. *Considere um vetor $v \neq \bar{0}$ tal que $T(v) = \sigma\, v$. Então σ é uma raiz do polinômio característico de T.*

Prova: Observe que como já vimos acima

$$(T - \sigma I)(v) = \bar{0},$$

portanto a transformação linear $(T - \sigma I)$ não é inversível, logo

$$\det(T - \sigma I) = 0.$$

Ou seja, σ é uma raiz do polinômio característico $p(\lambda)$. □

Propriedade 2.2. *Cada raiz real do polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ é um autovalor de T.*

Prova: Observe que como $\det(T - \lambda I) = 0$ o sistema

$$(T - \lambda I)(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

admite solução não trivial. Seja $v \neq \bar{0}$ uma solução. Então,

$$(T - \lambda I)(v) = \bar{0}, \quad T(v) - \lambda v = \bar{0}, \quad T(v) = \lambda v.$$

Logo v é um autovetor com autovalor associado λ. □

Observação 1. *Observe que o polinômio $p(\lambda)$ tem, no máximo, três raízes diferentes, portanto, a transformação linear T tem no máximo três autovalores diferentes.*

Em resumo:

- As raízes (reais e complexas) de $p(\lambda) = \det(T - \lambda\, I)$ são os autovalores de T.
- A cada autovalor real associamos um autovetor. A *multiplicidade* do autovalor λ é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico.
- O autovalor de um autovetor é sempre uma raiz do polinômio característico $p(\lambda)$.

2.1 Propriedades do polinômio característico

- O coeficiente independente do polinômio característico $p(\lambda)$ de T é igual a $\det(T)$.
- Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes reais e/ou complexas do polinômio característico contadas com multiplicidade. Então

  $$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

  Ou seja

  $$a_3 = \det(T) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3).$$

Em outras palavras:

Propriedade 2.3. *O produto de todos os autovalores (reais e/ou complexos) de uma transformação linear T contados com multiplicidade é igual ao determinante de T.*

Observamos que uma matriz (quadrada) é inversível se, e somente se, seu determinante é não nulo. Esta afirmação implica o seguinte:

Propriedade 2.4. *Uma transformação linear T é inversível se, e somemte se, $\lambda = 0$ não é autovalor de T.*

Definição 3 (Traço)**.** *O* traço *de uma matriz quadrada A (denotado $tr(A)$) é a soma dos elementos da diagonal principal. Ou seja, se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Seja A é uma matriz $n \times n$, então, se n é ímpar, o traço é igual ao coeficiente do termo de grau $(n-1)$ do seu polinômio característico, e se n é par é igual a dito coeficiente mudado de sinal. Esta afirmação é simples quando $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

No caso de matrizes 3×3, a afirmação segue de forma similar (v. somente deve identificar o termo de grau dois).

Exemplo 1. *Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz associada é*

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Acabamos de ver que o polinômio característico de $[T]$ é

$$p_{[T]}(\lambda) = \lambda^2 - (tr([T]))\,\lambda + \det([T]).$$

Por outra parte, se σ e ρ são as raizes (reais ou complexas) do polinômio característico, então

$$p(\lambda) = (\lambda - \sigma)(\lambda - \rho) = \lambda^2 - (\sigma + \rho)\lambda + \sigma\rho.$$

Portanto,

$$tr([T]) = \sigma + \rho,$$

isto é, o traço é igual à soma dos autovalores contados con multiplicidade.

Afirmação anterior relacionando o traço e a soma dos autovalores é verdadeira em geral obtida da mesma forma.

Propriedade 2.5. *O traço de uma matriz é igual à soma dos autovalores contados con multiplicidade.*

Por exemplo, considere uma matriz A, 3×3. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 os autovalores de A (reais ou complexos). Então,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3) = \\ &= -(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda + \lambda_2\,\lambda_3). \end{aligned}$$

Desenvolvendo temos

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\lambda^2 - (\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3)\,\lambda + \det(A).$$

Portanto, o coeficiente de λ^2, que é o traço de A, é

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Portanto, o traço de uma matriz é igual a soma dos autovalores de A contados com multiplicidade.

2.2 Exemplos

Exemplo 2. *Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores da transformação linear de matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta: O polinômio característico é

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\,[(\lambda - 3)\,\lambda + 6] - 6\,(1-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 3\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 - 4\,\lambda + 3) = \\ &= -\lambda\,(\lambda - 3)\,(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Logo as raízes (que correspondem aos autovalors) são 0, 3 e 1.

A seguir calcularemos os autovetores associados aos autovalores. Devemos resolver os seguintes sistemas, encontrando as soluções não triviais (diferentes de $(0,0,0)$) dos mesmos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{autovetores associados a } \lambda = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ -2 & 3-1 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{autovet. associados a } \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ -2 & 3-3 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{autovet. associados a } \lambda = 3$$

As soluções são, respectivamente,

$$(t,t,t), \quad (t,t,0), \quad (-t,0,2\,t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0.$$

$\square$

Exemplo 3 (Autovalores de matrizes triangulares)**.** *Determine os polinômios característicos e os autovalores de:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Os polinômios característicos p_A, p_B, etc são:

$$\begin{aligned} &p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3), \\ &p_B(\lambda) = p_C(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3), \\ &p_D(\lambda) = p_E(\lambda) = -(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Observe que *matrizes diferentes podem ter polinômios característicos iguais.*

Estudaremos a seguir os autovetores das matrizes A, B, C, D e E. Observamso primeiro que $\lambda = 1$ é um autovalor de multiplicidade 2 de B e C e de multiplicidade 3 de D e E.

Matriz A:

- autovetores associados a 1: $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$,
- autovetores associados a 2: $(t, t, 0)$, $t \neq 0$,
- autovetores associados a 3: (t, t, t), $t \neq 0$.

Matriz B:

- Autovetores de $\lambda = 1$ de B: todos os vetores não nulos do plano $z = 0$.
- Autovetores de $\lambda = 3$ de B: todos os vetores não nulos da forma $(0, 0, t)$.

Matriz C:

- Autovetores de $\lambda = 1$ de C: todos os vetores não nulos da forma $(t, 0, 0)$.
- Autovetores de $\lambda = 3$ de C: todos os vetores não nulos da forma $(3t/2, t, 2t)$.

Observe que para o autovalor 1 de B é possível obter um plano de autovetores (excluido o vetor nulo) e para C somente é possível obter uma reta (excluido o vetor nulo).

Matriz D:

- Autovetores de $\lambda = 1$ de D: os vetores não nulos do plazo $y + z = 0$.

Matriz E:

- Autovetores de $\lambda = 1$ de E: todos os vetores não nulos da forma $(t, 0, 0)$.

Como no caso anterior, para o autovalor 1 de D é possível obter um plano de autovetores (excluido o vetor nulo) e para E somente é possível obter uma reta (excluido o vetor nulo). $\square$