Álgebra Linear I - Aula 6

1. Equação cartesiana do plano.
2. Equação cartesiana da reta.
3. Posições relativas: de duas retas, de uma reta e um plano, de dois planos.

Roteiro

1 Equação cartesiana do plano

A equação cartesiana do plano π é da forma

$$\pi \colon a\,x + b\,y + c\,z = d.$$

O vetor $\bar{n} = (a, b, c)$ é um *vetor normal* do plano.

Propriedade 1.1. *O vetor normal n do plano é ortogonal a qualquer vetor diretor ou paralelo do plano π.*

Prova: De fato, afirmamos que dados dois pontos quaisquer do plano $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ se verifica

$$\bar{n} \cdot \bar{PQ} = 0.$$

Observe que como os pontos pertencem ao plano π,

$$a\,p_1 + b\,p_2 + c\,p_3 = d, \quad a\,q_1 + b\,q_2 + c\,q_3 = d,$$

e considerando a segunda equação menos a primeira obtemos

$$a\,(q_1 - p_1) + b\,(q_2 - p_2) + c\,(q_3 - p_3) = d - d = 0,$$

mas a última expressão é extamamente o produto escalar $\bar{n} \cdot \bar{PQ}$.

Agora é suficiente observar que qualquer vetor paralelo ao plano π é da forma $\overline{PQ}$, onde P e Q são pontos do plano. $\square$

1.1 Equações cartesianas e paramétricas

A seguir veremos as relações entre as equações cartesiana e paramétrica de um plano, e como passar de uma equação à outra.

Veremos primeiro como passar de cartesianas a paramétricas. Para isso devemos determinar dois vetores diretores do plano π e um ponto do plano. Para isso é suficiente determinar três pontos do plano: por exemplo, assumindo que a, b e c são não nulos, obtemos três pontos do plano:

$$A = (d/a, 0, 0), \quad B = (0, d/b, 0), \quad C = (0, 0, d/c).$$

Agora já conhecemos um ponto e dois vetores paralelos do plano, dados suficientes para determinar uma equação paramétrica do plano.

Exemplo 1. *Calcule a equação paramétrica do plano $x + 2y + z = 1$.*

Resposta: Temos que três pontos do plano são: $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$. Logo dois vetores paralelos ao plano são: $(1, 0, -1)$ e $(1, -1, 1)$. Portanto, uma equação paramétrica é:

$$x = 1 + t + s, \quad y = -s, \quad z = -t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Obviamente, há outras (muitas) possibilidades de equações paramétricas. Por exemplo, $(2, -1, 0)$ e $(0, 1, -2)$ são vetores paralelos do plano (pois são ortogonais ao vetor normal) e o ponto $(0, 1, 1)$ pertence ao plano, assim

$$x = 2\,t, \quad y = -t + s, \quad z = 1 - 2s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

V. pode encontrar outras equações. $\square$

Para passar da equação paramétrica à equação cartesiana há duas possibilidades:

- consideramos dois vetores v e w paralelos ao plano v e w. Obtemos o vetor normal do plano como $n = v \times w$. Como já conhecemos um ponto, a equação cartesiana está determinada.
- O método de eliminação dos parámetros s e t que ilustramos a seguir com um exemplo.

Exemplo 2 (Eliminação de parâmetros)**.** *Dado o plano π de equações paramétricas*

$$x = 1 - s, \quad y = 1 - t, \quad z = t - 2s,$$

Calcule sua equação cartesiana.

Resposta: Observe que da equação paramétrica obtemos dois vetores paralelos ao plano $\bar{v} = (-1, 0, -2)$ e $\bar{w} = (0, -1, 1)$ e um ponto dele $P = (1, 1, 0)$.

Obtemos

$$s = 1 - x, \quad t = 1 - y.$$

Substituindo na terceira equação obtemos:

$$2x - y - z = 1.$$

Verifique que $(2, -1, 1)$ é ortogonal aos vetores paralelos do plano $\bar{v} = (-1, 0, -2)$ e $\bar{w} = ((0, -1, 1)$.

Usando a equação paramétrica do plano escolha três pontos de π não colineares e verifique que satisfazem a equação cartesiana. $\square$

Exemplo 3 (Equação cartesiana e produto vetorial)**.** *Determine a equação cartesiana do plano paralelo aos vetores* $u = (1, 2, 3)$ *e* $v = (2, 1, 1)$ *que contém o ponto* $A = (1, 2, 3)$*.*

Resposta: Sabemos que um vetor normal do plano é

$$u \times v = (-1, 5, -3).$$

Logo a equação cartesiana é da forma

$$x - 5y + 3z = d.$$

Determinamos o valor de d pelo ponto $A = (1, 2, 3)$:

$$1 - 10 + 9 = d, \quad d = 0.$$

Assim temos sua equação cartesiana:

$$x - 5y + 3z = 0.$$

Note que isto implica que o plano contém a origem. $\square$

2 Equação cartesiana da reta

Para obter a *equação da cartesiana da reta* r a escrevemos como interseção de dois planos não paralelos π e ρ, onde os planos estão escritos em equações cartesianas:

$$r\colon a\,x + b\,y + c\,z = d, \quad a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'.$$

Para passar de equações cartesianas a equações paramétricas o mais simples é resolver o sistema escolhendo uma variável como parâmetro.

Exemplo 4. *Calcule a equação paramétrica da reta r de equações cartesianas*

$$x - y + z = 0 \quad e \quad 2\,x - y + 2\,z = 1.$$

Resposta: Escalonando, obtemos o sistema,

$$x - y + z = 0, \quad y = 1.$$

Logo, $z = 1 - x$. Escolhendo x como parâmetro, a equação de r é

$$(t, 1, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verifiquemos que o resultado está certo: é suficiente ver que este verifica as equações dos planos. Por exemplo, substituindo no primeiro:

$$t - 1 + (1 - t) = 0.$$

Verifique que o vetor diretor da reta é ortogonal aos vetores normais dos planos. □

Observação 1. *Por construção, o vetor diretor da reta é perpendicular aos dois vetores normais dos planos*

$$\pi\colon a\,x + b\,y + c\,z = d, q \qquad \rho\colon a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'.$$

Portanto, um vetor diretor da reta é

$$n = (a, b, c) \times (a', b', c').$$

Observação 2. *Nem sempre é possível escolher qualquer variável como parâmetro. Por exemplo, no exemplo anterior não é possível escolher y como parâmetro. Veja também que na reta de equações cartesianas $x - y = 2$ e $z = 2$ não é possível escolher z como parâmetro.*

Outra forma de calcular a equação paramétrica da reta é determinar dois pontos A e B da reta (isto é, encontrar duas soluções do sistema). Assim temos o vetor diretor $\overline{AB}$ e um ponto A.

3 Posições relativas

3.1 Posição relativa de duas retas

Quanto posição relativa, duas retas $r\colon P + t\,v$ e e $s\colon Q + t\,w$ podem ser:

- *paralelas* (se $v = \sigma w$, $\sigma \in \mathbb{R}$);
  - iguais (se $Q \in r$);
  - disjuntas (se $Q \notin r$);
- *reversas*: as retas não são paralelas e não se intersectam (isto é, v e w não são paralelos e $\overline{PQ} \cdot (v \times w) \neq 0$);
- *concorrentes*: se intersectam em um ponto (se v e w não são paralelos e $\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0$).

Exemplo 5.

- *As retas* $r\colon (1 + t, 2\,t, t)$ *e* $s\colon (5 + 2\,t, 4\,t, 2\,t + 2)$ *são paralelas e não disjuntas.*
- *As retas* $r\colon (1 + t, 2\,t, t)$ *e* $s\colon (t, 1, 2\,t + 2)$ *são reversas (escolha* $P = (1, 0, 0)$*,* $Q = (0, 1, 2)$ $v = (1, 2, 1)$ *e* $w = (1, 0, 2)$ *e veja que*

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot (v \times w) &= (-1, 1, 2) \cdot ((1, 2, 1) \times (1, 0, 2)) = \\ &= (-1, 1, 2) \cdot (4, -1, -2) = -4 - 1 - 4 = -9 \neq 0. \end{aligned}$$

3.2 Posição relativa de reta e plano

Quanto posição relativa, uma reta $r\colon P + tv$ e o plano e $\pi\colon ax + by + cz = d$ podem ser:

- paralelos (se $v \cdot n = 0$, onde $n = (a, b, c)$,)
  - r contida em π (se $P \in \pi$)
  - disjuntos (se $P \notin \pi$)
- interseção em um ponto ($n \cdot v \neq 0$).

Exemplo 6. *A reta* $(1 + t, t, 2\,t)$ *é paralela ao plano* $\pi\colon x + y - z = 1$ *e o ponto* $(1, 0, 0)$ *pertence ao plano, logo a reta está contida no plano. A reta* (t, t, t) *intersecta* π *em um ponto (no ponto* $(1, 1, 1)$*).*

3.3 Posição relativa de dois planos

Quano posição relativa, dois planos

$$\pi\colon ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad \rho\colon a'x + b'y + c'z = d'$$

podem ser:

- paralelos (se $n = \sigma n'$, onde $\sigma \neq 0$, $n = (a, b, c)$ e $n' = (a', b', c')$)
  - iguais (se $n = \sigma n'$ e $d = \sigma d'$)
  - disjuntos (se $n = \sigma n'$ e $d \neq \sigma d'$)
- se intersectam ao longo de uma reta (se n e n' não são paralelos).

Exemplo 7. *Planos*

- *paralelos e diferentes:* $\pi\colon x + y + z = 1$ *e* $\rho\colon 3x + 3y + 3z = 1$,
- *iguais:* $\pi\colon x + y + z = 1$ *e* $\rho\colon 3x + 3y + 3z = 3$,
- *se intersectando ao longo de uma reta:* $\pi\colon x+y+z = 1$ *e* $\rho\colon x+2y+3z = 1$.