Álgebra Linear I - Aula 5

1. Produto misto.
2. Equação paramétrica da reta.
3. Retas paralelas e reversas.
4. Equação paramétrica do plano.
5. Ortogonalizade.

Roteiro

1 Produto Misto

Dados três vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad \bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

definimos o produto misto $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ como

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Observe que a expressão $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \times w$ não faz sentido: não é possível calcular o produto vetorial de um número $(\bar{u} \cdot \bar{v})$ por um vetor.

1.1 Significado geométrico do produto misto

Propriedade 1.1 (Volume e produto misto)**.** *O valor absoluto*

$$|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$$

é o volume do paralelepípedo de arestas $\bar{u}$, $\bar{v}$ e $\bar{w}$.

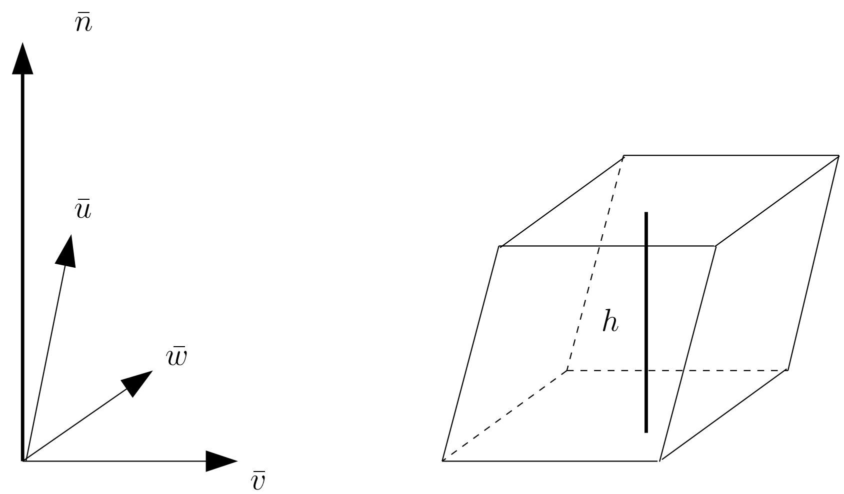

Figura 1: Produto misto

Prova: Para provar a propriedade considere o vetor $\bar{n} = \bar{v} \times \bar{w}$. Suponha que a base do paralelepípedo *contém* os vetores $\bar{v}$ e $\bar{w}$. A área A da base é $A = |\bar{n}|$ (esta afirmação segue do significado geométrico do produto vetorial). Então, a altura h do paralelepípedo é $|\bar{u}| \cos \alpha$, onde α é o ângulo formado por $\bar{n}$ e $\bar{u}$. Portanto, o volume do paralelepípedo é base por altura, isto é,

$$A\, h = |\bar{n}||\bar{u}| \cos \alpha = |\bar{u} \cdot \bar{n}| = |\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w}|.$$

Obtemos assim a propriedade. $\square$

1.2 Propriedades do produto misto

Enumeraremos as principais propriedades do produto misto. Estas propriedades decorrem das propriedades dos determinantes.

- $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{u})$, pois $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{n}$ é ortogonal a $\bar{u}$, logo $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ (v. também pode interpretar como um determinante com duas linhas iguais).

- O produto misto verifica as seguines relações (correspondentes a trocar a ordem de colunas em um determinante): $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = -\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}) = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{w} \cdot (\bar{v} \times \bar{u})$, etc.

- $\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{w}) = 0 = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{w})$.

Exemplo 1. *Sabendo que*

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 2$$

determine

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}), \quad \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}), \quad \bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}).$$

Observe que

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}) = -\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = -2.$$

Também

$$\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = -\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}) = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 2.$$

2 Equação paramétrica da reta

A *Equação vetorial da reta* reta r que contém um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e é paralela ao vetor $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (o *vetor diretor* da reta) é

$$X = P + t\bar{v},$$

A *equação paramétrica* da reta r é:

$$x = p_1 + tv_1, \quad y = p_2 + tv_2, \quad z = p_3 + tv_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

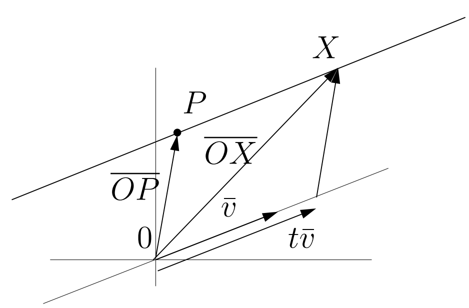

Figura 2: Reta

Existem diversas formas de determinar uma reta:

- reta r que contém dois pontos, $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$: o vetor diretor da reta é $\overline{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ e sua equação vetorial é $X = P + t\overline{PQ}$,

- reta r que contém um ponto P e é paralela a $\bar{v}$: $X = P + t\bar{v}$.

Mais tarde veremos retas obtidas como interseções de dois planos (equações cartesianas).

Exemplo 2. *Determine a interseção da reta r que contém os pontos*

$$A = (0, 0, 1) \quad e \quad B = (1, 0, 0)$$

com a superfície $z = x^2 + y^2$.

Dê também um exemplo de uma reta s que não intersecte à superfície anterior.

Resposta: O vetor diretor da reta é o vetor $\overline{AB} = (1, 0, -1)$, e um ponto da reta é $(1, 0, 0)$. Logo a equação paramétrica de r é

$$(1 + t, 0, -t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Devemos encontrar o parâmetro t tal que

$$-t = (1 + t)^2 + 0^2, \quad t^2 + 3t + 1 = 0, \quad t = (-3 \pm \sqrt{5})/2.$$

Logo os pontos de interseção são:

$$((-1 + \sqrt{5})/2, 0, (3 - \sqrt{5})/2) \quad \text{e} \quad ((-1 - \sqrt{5})/2, 0(3 + \sqrt{5})/2))$$

Verifique que as respostas estão certas.

Um exemplo de uma reta que não intersecta à superfície é obtido como segue. Escolha o ponto $(0, 0, -1)$. Veja que este ponto está *abaixo* da superfície (faça um desenho e confira). Considere agora a reta s de vetor diretor (a, b, c) que contém ao ponto $(0, 0, -1)$:

$$s\colon (at, bt, -1 + ct), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculemos (ou tentemos calcular) o ponto de interseção de s e a superfície. Observe que *não ter interseção* corresponde a uma equação sem solução (real). Devemos resolver:

$$ct - 1 = a^2t^2 + b^2t^2, \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{c^2 - 4(a^2 + b^2)}}{2}$$

Portanto, é suficiente escolher $a^2+b^2 > c^2/4$ (radicando negativo). Ou seja

$$\sqrt{a^2+b^2} > |c|/2 \quad \text{ou} \quad \sqrt{a^2+b^2} < -|c|/2.$$

Finalmente, verifiquemos que qualquer reta que contém um ponto da forma $(0,0,k)$, $k \geq 0$, intersecta a superfície. Repetimos os argumentos anteriores e obtemos o seguinte. Agora a reta s é da forma $(at, bt, k+ct)$, para calcular as interseções devemos resolver:

$$c\,t + k = (a^2+b^2)\,t^2, \quad t = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4k(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}.$$

Como o radicando é sempre não negativo esta equação tem sempre solução real. □

2.1 Interseção de duas retas. Paralelismo

Para calcular a interseção de duas retas r e r', digamos

$$r\colon X = P + t\bar{v}, \qquad r'\colon X = Q + s\bar{u},$$

(equações vetoriais), devemos ver se o sistema

$$P + t\bar{v} = Q + s\bar{u}$$

tem solução, onde s e t são as incógnitas.

Se $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$, $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$, e $\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)$, o sistema é

$$p_1-q_1 = s\,u_1 - t\,v_1, \quad p_2-q_2 = s\,u_2 - t\,v_2, \quad p_3-q_3 = s\,u_3 - t\,v_3,$$

onde s e t são as incógnitas. Se o sistema tem solução os pontos de interseção se obtêm substituindo t ou s nas equações.

Temos a seguinte interpretação geométrica do resultado:

- o sistema não tem solução: as retas não se intersectam,
- o sistema tem solução:
  - solução única: interseção um ponto,

– infinitas soluções: retas iguais.

Observação 1. *Temos a seguinte interpretação* física. *Seja M o ponto de interseção das duas retas (supondo que o ponto exista) e suponha que o sistema acima tem solução $t = t_0$ e $s = s_0$. Considere agora um corpo C saindo do ponto P e se movimentando com velocidade $\bar{v}$. O corpo chegará ao ponto M em t_0* segundos. *Analogamente, se v. considera um corpo K saindo do ponto Q e se movimentando com velocidade $\bar{u}$, o corpo K chegará ao ponto M em s_0* segundos. *Em geral, t_0 e s_0 são diferentes e os corpos não colidem no ponto M. Temos que as trajetorias dos pontos (duas retas) se intersectam mas não há colisão.*

Observe que se v. resolve o sistema

$$P + t\bar{v} = Q + t\bar{u}$$

(isto é, v. considera o mesmo parâmetro para as duas retas!) o que está determinando não é se os corpos C e K passam pelo ponto M (isto é as retas se intersectam) mas se os corpos passam no mesmo instante pelo ponto M, e portanto há uma colisão.

Exemplo 3.

- $r_1 = (1 + t, 2 + t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ *e* $r_2 = (1 - t, 1 + 2t, 5 - t)$, $t \in \mathbb{R}$ *(as retas não se intersectam)*
- $r_1 = (3 + t, 4 + t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ *e* $r_2 = (3 - t, 4 - 2t, 3), t \in \mathbb{R}$ *(interseção em um ponto, no ponto* $(3, 4, 3)$*,*
- $r_1 = (1 + t, 2 + t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ *e* $r_2 = (1 - t, 1 + 2t, 1 + 5t)$, $t \in \mathbb{R}$*, (interseção em um ponto, no ponto* $(2/3, 5/3, 8/3)$*,*
- $r_1 = (1 + t, 2 + t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ *e* $r_2 = (6 + 2t, 7 + 2t, 8 + 2t), t \in \mathbb{R}$ *(retas iguais).*

2.2 Retas paralelas e reversas

Duas retas r_1 e r_2 são *paralelas* se seus vetores diretores são paralelos, isto é, $\bar{u} = \sigma\,\bar{v}$, onde $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são os vetores diretores das retas.

Observe que dadas duas retas paralelas r_1 e r_2 há duas possibilidades: ou são iguais ou são disjuntas. Em outras palavras, duas retas paralelas que se intersetam são iguais. Verifique.

Duas retas são *reversas* se não são paralelas e não se intersectam.

3 Equação paramétrica do plano

A *equação vetorial do plano* π que contém um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e é paralelo aos vetores $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ é dada por:

$$X = P + t\,\bar{v} + s\,\bar{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Os vetores $\bar{v}$ e $\bar{w}$ são vetores *diretores* ou paralelos ao plano π.

Observe que um plano pode ter muitos vetores diretores não paralelos entre si. Por exemplo, o plano cartesiano $z = 0$ tem como vetores diretores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, e $(1, 2, 0)$, e também $(178, 159, 0)$.

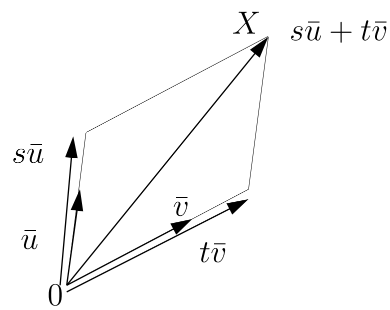

Figura 3: Plano

A equação paramétrica do plano π acima é

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1 + s\,w_1, \\ y &= p_2 + t\,v_2 + s\,w_2, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \\ z &= p_3 + t\,v_3 + s\,w_3, \end{aligned}$$

Observe que há dois parâmetros t e s.

Veremos a seguir algumas formas de determinar um plano (alguns exemplos):

- plano que contém três pontos não colineares, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, e $R = (r_1, r_2, r_3)$: dois vetores paralelos ou diretores do plano são $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$. O fato dos pontos não serem colineares garante que os vetores não são paralelos. A equação vetorial é:

$$X = P + t\,\overline{PQ} + s\,\overline{PR}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

- plano que contém um ponto P e a reta $r: Q + t\bar{v}$ (que não contém P): dois vetores diretores ou paralelos do plano são $\overline{PQ}$ e $\bar{v}$, a equação vetorial é
$$X = P + t\overline{PQ} + s\,\bar{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

- plano que contém dois pontos P e R e é paralelo à reta $r: Q + t\bar{v}$ (que não contém P nem R): os vetores paralelos do plano são $\overline{PR}$ e $\bar{v}$, e temos
$$X = P + t\,\overline{PR} + s\,\bar{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

  Note que pode não existir tal plano (porquê?, dê um exemplo dessa situação), assim devemos verificar se Q satisfaz a equação obtida.

- plano determinado por duas retas paralelas diferentes $r: Q + t\,\bar{v}$ e $r': P + t\,\bar{v}$: os vetores diretores do plano são $\overline{PQ}$ e $\bar{v}$, e a equação vetorial ou paramétrica é
$$X = P + t\,\overline{PQ} + s\,\bar{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

- plano determinado por duas retas $r: Q + t\,\bar{v}$ e $r': P + t\,\bar{w}$ e não paralelas com interseção não vazia: os vetores paralelos do plano são $\bar{v}$ e $\bar{w}$, e a equação é
$$X = P + t\,\bar{w} + s\,\bar{v} = Q + t\,\bar{w} + s\,\bar{v}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Exercício 1. *Ilustre com exemplos todas as situações descritas acima.*

3.1 Interseção de planos. Paralelismo

Para calcular a interseção de dois planos procedemos exatamente como no caso das retas. Neste caso teremos um sistema de três equações (correspondentes às coordenadas x, y e z) e quatro incógnitas (os parâmetros s e t do primeiro plano, e α e β do segundo). Sistemas sem solução correspondem a planos que não se intersectam.

Dizemos que dois planos π e ρ são paralelos se são iguais ou não se intersectam. Temos os seguintes casos para a interseção de dois planos:

- planos paralelos (iguais ou distintos) e

- planos cuja interseção é uma reta.

Exercício 2. *Usando o método de escalonamento veja que se dois planos se intersectam em um ponto, então existem infinitas interseções (uma reta ou o próprio plano, quando os dois planos são iguais).*

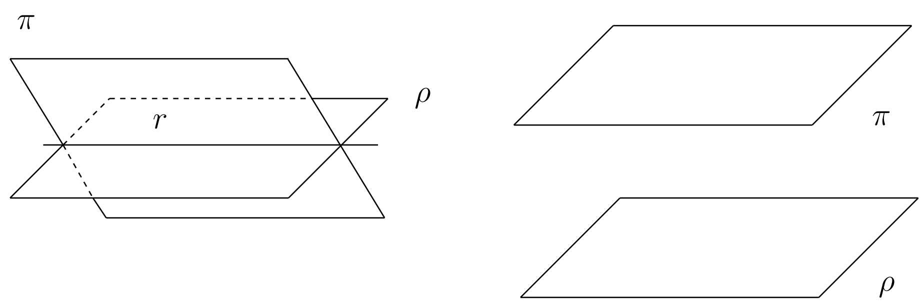

Figura 4: Interseções de planos

Exemplo 4. *Determinar a interseção do plano* π *que contém os pontos* $(1, 2, 3)$*,* $(2, 3, 1)$ *e* $(3, 2, 1)$*, e o eixo* $\mathbb{X}$*.*

Resposta: Dois vetores diretores de π são, por exemplo, $(1, 1, -2)$ e $(1, -1, 0)$. Logo uma equação paramétrica de π é

$$(1 + t + s, 2 + t - s, 3 - 2t), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

A equação paramétrica do exio X é $(m, 0, 0)$, $m \in \mathbb{R}$. Logo para calcular a interseção devemos resolver

$$m = 1 + t + s, \quad 0 = 2 + t - s, \quad 0 = 3 - 2t.$$

Ou seja, $t = 3/2$, $s = 7/2$ e $m = 6$. Logo o ponto é $(6, 0, 0)$. $\square$

4 Ortogonalidade

Duas retas são *ortogonais* quando se intersectam e seus vetores diretores são perpendiculares (ou seja, seu produto escalar igual a zero)

Exemplo 5. *As retas* $(1 + t, 2 + t, 1 - t)$ *e* $(2 + t, 3 + t, 2t)$ *são ortogonais.*

Uma reta é ortogonal a um plano quando seu vetor diretor é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano (mais tarde voltaremos a esta questão, depois de introduzir equações cartesianas).