Álgebra Linear I - Aula 4

1. Determinantes (revisão).
2. Significado geométrico.
3. Cálculo de determinantes.
4. Produto vetorial.
5. Aplicações do produto vetorial.

Roteiro

1 Determinantes (revisão rápida)

1.1 Cálculo de determinantes

Em primeiro lugar, lembramos como calcular determinantes 2×2 e 3×3 e introduziremos uma notação para o determinante.

Determinantes 2×2**:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinantes 3×3**:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Neste caso, dizemos que desenvolvemos o determinante pela primeira linha. É possível desenvolver o determinante usando outras linhas (ou colunas), obtendo o mesmo resultado. O desenvolvimento pela segunda linha fornece:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Finalmente, o desenvolvimento pela terceira linha é:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

De forma mais geral, consideramos o determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e denotamos por A_{ij} o determinante 2×2 onde eliminamos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Por exemplo,

$$A_{13} = \begin{vmatrix} & \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Temos que o desenvolvimento do determinante pela i-ésima linha é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1}\, A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}\, A_{i2} + (-1)^{i+3} a_{i3}\, A_{i3}.$$

De forma similar, o desenvolvimento do determinante pela i-ésima coluna é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+i} a_{1i}\, A_{1i} + (-1)^{2+i} a_{2i}\, A_{2i} + (-1)^{3+i} a_{3i}\, A_{3i}.$$

Obviamente, a melhor estratégia é desenvolver o determinante por uma linha ou coluna com “muitos” zeros.

Notação: Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad w = (w_1, w_2, w_3).$$

Usaremos a seguinte notação: $\det(u, v, w)$ representa o determinante que tem por linhas as coordenadas dos vetores u, v e w:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 Propriedades dos determinantes

Os determinantes verificam as seguintes propriedades (que formularemos para determinantes 3×3):

- Dado qualquer número real σ, $\det(u, \sigma u, w) = 0 = \det(u, v, \sigma u)$ (um determinante com uma linha proporcional a outra é nulo).
- $\det(u, v, w) = -\det(v, u, w) = -\det(w, v, u)$ (ao permutar duas linhas de um determinante este muda o sinal).
- $\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$.
- Dado qualquer número real σ se verifica,

$$\det(\sigma u, v, w) = \det(u, \sigma v, w) = \det(u, v, \sigma w) = \sigma \det(u, v, w).$$

Exercício 1. *Verifique as propriedades acima para determinantes* 2×2.

As propriedades anteriores também podem ser formuladas usando colunas em vez de linhas (verifique no caso 2×2).

1.3 Exemplos de cálculo de determinantes

A seguir calcularemos alguns determinantes usando as propriedades dos determinantes da seção precedente (operações com linhas e/ou colunas).

Exemplo 1. *Verifique que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)(c-b).$$

Restando da segunda coluna a primera e da terceira a primeira obtemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Agora, desenvolvendo pela primeira linha, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}.$$

Como $(b-a)$ e $(c-a)$ multiplicam a primeira e a segunda coluna temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (b+a) & (c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ (b+a) & (c-b) \end{vmatrix}.$$

Na última operação consideramos a segunda coluna menos a primeira. Agora é suficiente desenvolver o determinante pela primeira linha.

Exemplo 2. *Calcule o determinante*

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix}.$$

Consideramos as seguintes operações com as linhas: segunda menos 2 vezes a primeira, e terceira menos 3 vezes a primeira:

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = 3333 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o último determinante pela primeira coluna obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = 3333.$$

Exemplo 3. *Sem calcular diretamente verifique que*

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

Observe que

$$\sin(\alpha+\delta) = \sin\alpha\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\alpha.$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\gamma \end{vmatrix}.$$

Pelas propriedades dos determinantes, este não muda se restamos da terceira coluna $(\cos\delta)$ vezes a primeira coluna mais $(\sin\delta)$ vezes a segunda coluna. Mas este resultado fornece uma coluna (a terceira) formada exclusivamente por zeros. Desenvolvendo por esta coluna obtemos o resultado.

2 Interpretação geométrica dos determinantes 2×2: Área de um paralelogramo.

Significado geométrico do determinante: *O valor absoluto do determinante*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |ad - bc|.$$

é igual a área do paralelogramo P que tem por vértices a origem e os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$.

Observe que a área do paralelogramo anterior é independente da escolha do quarto vértice. Veja figura. Escolheremos o quarto vértice C do paralelogramo P da forma $C = (a + c, b + d)$.

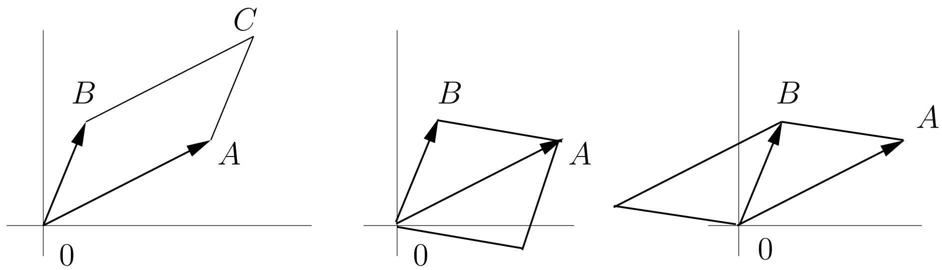

Figura 1: Paralelogramos com vértices 0, A e B

Estratégia: Para obter o resultado transformaremos o paralelogramo P em um paralelogramo da mesma área com lados paralelos aos eixos coordenados e tendo a origem como vértice. Portanto, calcular a área deste novo paralelogramo é muito simples!.

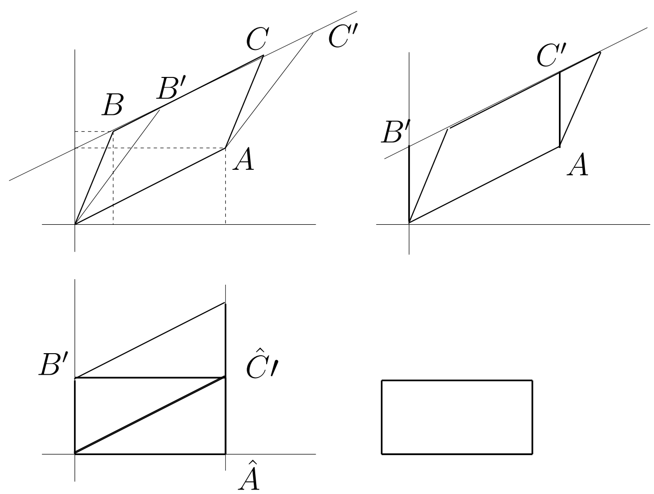

Figura 2: Significado geométrico do determinante

Passo 1: A área de P é igual à área de qualquer paralelogramo P' com vértices 0, A e B' e C', onde B' e C' estão na reta r determinada pelos pontos B e C (veja a figura). A afirmação decorre da fórmula área de P,

$$\text{área}(P) = \text{(b)ase} \times \text{(h)altura},$$

todos estes paralelogramos têm a mesma base b (o segmento $0A$) e a mesma altura h:

$$h = |0B| \sin\theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos segmentos $0A$ e $0B$. Veja a figura.

Dos paralelogramos acima, escolheremos o que tem o vértice B' no eixo $\mathbb{Y}$. Para determinar B' devemos calcular as coordenadas da interseção da reta r contendo a B e C e o eixo $\mathbb{Y}$. A equação paramétrica da reta r acima é

$$r\colon (c+ta, d+tb),\ t \in \mathbb{R}.$$

A reta r intersecta o eixo $\mathbb{Y}$ quando $t = -c/a$. Logo o ponto de interseção da reta r e o eixo $\mathbb{Y}$ é

$$B' = (0, d-(cb)/a).$$

Passo 2: A área de P' é igual à área de qualquer paralelogramo $\hat{P}$ com vértices 0, $\hat{A}$ e B' e $\hat{C}'$, onde $\hat{A}$ e $\hat{C}'$ estão na reta s determianda pelos pontos A e C' (veja a figura). Observe que s reta s é paralela ao eixo $\mathbb{Y}$ e sua equação paramétrica é

$$s\colon (a, d+t), t \in \mathbb{R}.$$

Escolhemos $\hat{A}$ como o ponto de intersecao de s com o eixo $\mathbb{X}$, ou seja $\hat{A} = (a, 0)$.

Passo 3: O retângulo $\hat{P}$ tem como vértices os pontos

$$(0,0), \quad B' = (0, d-(cb)/a) \quad \text{e} \quad \hat{A} = (a,0).$$

Portanto, sua área é

$$a\,(d-(cb)/a) = ad - cb,$$

que é exatamente o determinante procurado.

3 Produto vetorial

Definição: Dados vetores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ definimos o *produto vetorial* $\bar{u} \times \bar{v}$ como o vetor

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

onde

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

3.1 Propriedades do produto vetorial

- O vetor $\bar{u} \times \bar{v}$ é ortogonal aos vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$, isto é,

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0.$$

  Para provar a afirmação é suficiente interpretar $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$ como um determinante com duas linhas iguais. Veja que

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

- $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$ (a troca da ordem de duas linhas de um determinante muda o sinal).

- $\bar{u} \times \bar{u} = 0$ (um determinante de uma matriz com duas linhas iguais vale zero).

- $(\bar{u} + \bar{u}') \times \bar{v} = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u}' \times \bar{v})$,

- $(\sigma\bar{u}) \times \bar{v} = \sigma(\bar{u} \times \bar{v})$, para todo $\sigma \in \mathbb{R}$.

- $\bar{u} \times \bar{v} = 0$ se, e somente se, os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são paralelos ($\bar{v} = \sigma\bar{u}$).

Também temos as seguintes propriedades:

- O **módulo do produto vetorial** $\bar{u} \times \bar{v}$ é a área de um paralelogramo de lados $\bar{u}$ e $\bar{v}$, (lembre o significado geométrico de um determinante dois por dois como área de um paralelogramo).

- O módulo do produto vetorial verifica a fórmula:

$$||\bar{u} \times \bar{v}|| = ||\bar{u}||\,||\bar{v}||\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

  onde α é o ângulo entre os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

- **Orientação do vetor $\bar{u} \times \bar{v}$:** o sentido de $\bar{u} \times \bar{v}$ pode ser determinado usando a *regra da mão direita,* se θ é o ângulo formado pelos vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$, e $\bar{u}$ é girado um ângulo até coincidir com $\bar{v}$, se os dedos da mão direita se fecharem no sentido desta rotação então o polegar aponta no sentido de $\bar{u} \times \bar{v}$. Dito de outra forma, primeiro colocamos o canto da mão coincidindo com o primeiro vetor com a parte que corresponde ao dedo polegar sobre a origem do vetor. Depois fazemos girar a mão até coincidir con o vetor $\bar{v}$ (usando o caminho mais curto), deste jeito, o polegar apontara no sentido do vetor $\bar{u} \times \bar{v}$.

Exemplo 4. *Verificam-se as igualdades*

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Observação 1. *Não é válida, em geral, a fórmula*

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}.$$

Por exemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0$$

pois $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$*). Porém*

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Portanto, a expressão $\bar{u} \times \bar{v} \times \bar{w}$ não tem sentido: são necessários parênteses para saber quais são os produtos vetorias que devemos calcular.

4 Aplicações do produto vetorial

4.1 Cálculo da área de um paralelogramo

Exemplo 5. *Determine a área do paralelogramo de vértices* $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ *e* $(2, 1, 1)$.

Resposta: A área é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 1)$. Temos que

$$(1, 2, 3) \times (2, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -3).$$

Verifiqe que este vetor é ortogonal aos vetores $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 1)$. Temos

$$\|(-1, 5, 3)\| = \sqrt{1^{+}5^2 + 3^2} = \sqrt{35}.$$

Portanto, a área é $\sqrt{35}$. □

Questão 1. *O quarto vértice do paralelogramo do exemplo anterior está determinado? Quantas possibilidades existem? (um desenho ajuda, veja os desenhos do significado geométrico do determinante).*

Exemplo 6. *Considere um paralelogramo P cujos vértices são a origem, o ponto $A = (1, 2, 3)$ e um terceiro vértice C na reta (t, t, t). Determine C de forma que o paralelogramo P tenha área 1.*

Resposta: Para cada t, sejam $C_t = (t, t, t)$ e P_t um paralelogramo com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ e (t, t, t). A área de P_t é $|t|\sqrt{6}$ (justifique). Logo o ponto procurado é (por exemplo) $C = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

Existem outras possibilidades? Em caso Caso afirmativo determine os diferentes casos. □

4.2 Cálculo de vetores ortogonais a dois vetores dados u e v

Observe que dados dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ para determinar um vetor ortogonal aos dois vetores é suficiente calcular $\bar{u} \times \bar{v}$.

Exemplo 7. *Determine um vetor ortogonal a $\bar{u} = (1, 2, 3)$ e $\bar{v} = (2, 1, 1)$.*

Resposta: Por exemplo, o vetor $\bar{u} \times \bar{v} = (-1, 5, -3)$ (verifique, usando o produto escalar, a ortogonalidade). □