Álgebra Linear I - Aula 3

1. Produto escalar. Ângulos.
2. Desigualdade triangular.
3. Projeção ortogonal de vetores.

Roteiro

1 Produto escalar

Considere dois vetores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$. O *produto escalar* de u e v é definido da seguinte forma:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3.$$

A definição para o produto escalar de dois vetores do plano $\mathbb{R}^2$ é similar, se $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ então

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2.$$

As principais propriedades do produto escalar (todas de simples verificação) são as seguintes:

- **comutativa:** $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$,
- **distributiva:** $(\bar{u} + \bar{w}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{w} \cdot \bar{v}$,
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\, \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda\, (\bar{u} \cdot \bar{v})$.
- $\bar{u} \cdot \bar{u} = 0$ se, e somente se, $\bar{u} = \bar{0}$.

Observe que, como já referido, se verifica a seguinte propriedade do módulo de um vetor:

$$||\bar{u}||^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}.$$

1.1 Produto escalar e ângulos

Dizemos que dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ (não nulos) são *ortogonais* se verificam

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0.$$

Veremos a seguir que a noção de vetores ortogonais corresponde a noção de *perpendicularidade*. Por simplicidade, veremos esta propriedade no plano $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$\bar{u} = (u_1, u_2) \quad \text{e} \quad \bar{v} = (v_1, v_2).$$

Considere os pontos

$$A = (u_1, u_2) \quad \text{e} \quad B = (v_1, v_2).$$

Propriedade 1.1. *Os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são ortogonais ($\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$) se, e somente se, o triângulo de vértices 0 (a origem), A e B é retângulo.* (Veja a figura).

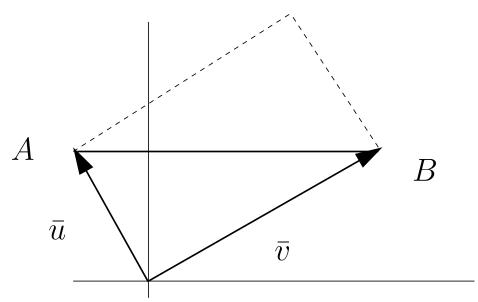

Figura 1: Ortogonalidade

Prova: Observamos, em primeiro lugar que, pelo teorema de de Pitágoras, o triângulo OAB é retângulo se, e somente se,

$$d(A, B)^2 = d(0, A)^2 + d(0, B)^2. \tag{1}$$

Observe que

$$d(A, B) = ||\bar{u} - \bar{v}||, \quad d(0, A) = ||\bar{u}||, \quad d(0, B) = ||\bar{v}||$$

e que se verificam as igualdades

$$||\bar{u} - \bar{v}||^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}), \quad ||\bar{u}||^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}, \quad ||\bar{v}||^2 = \bar{v} \cdot \bar{v},$$

A igualdade (1) é equivalente a:

$$(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v}.$$

Usando as propriedades do produto escalar e simplificando, obtemos,

$$2\,(\bar{u} \cdot \bar{v}) = 0.$$

Ou seja, o triângulo é retângulo se, e somente se, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, como queremos provar. $\square$

A seguir veremos uma fórmula que relaciona produto escalar e ângulos e que imediatamente implica a Propriedade 1.1.

Propriedade 1.2. *O produto escalar dos vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ também é dado pela fórmula*

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}|\,\cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado por $\bar{u}$ e $\bar{v}$, com $0 \le \alpha \le \pi$.

Em particular, o ângulo α entre dois vetores é dado pela fórmula

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}.$$

Prova: Provaremos a afirmação para vetores do plano. Suponhamos primeiro que os vetores são unitários. Como os vetores são unitários (veja a Aula 2) temos que

$$\bar{u} = (\cos\phi, \sin\phi), \quad \bar{v} = (\cos\theta, \sin\theta),$$

para certos ângulos ϕ e θ.

Logo, pela fórmula do coseno da soma de dois ângulos,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \cos\phi\,\cos\theta + \sin\phi\,\sin\theta = \cos(\phi - \theta) = \cos\alpha.$$

O que termina o caso em que os vetores são unitários.

No caso geral, escrevemos

$$\bar{u} = |\bar{u}|\,\bar{e} \quad \text{e} \quad \bar{v} = |\bar{v}|\,\bar{f},$$

onde $\bar{e}$ e $\bar{f}$ são vetores unitários paralelos a $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

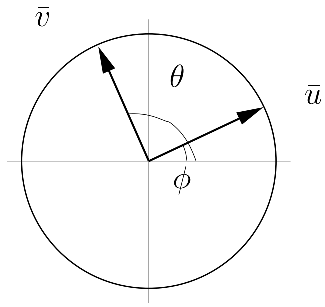

Figura 2: Produto escalar

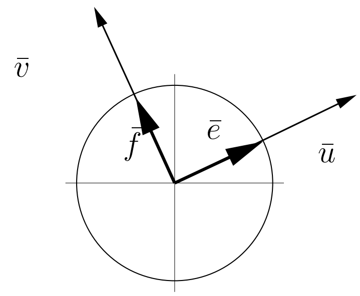

Figura 3: Produto escalar (continuação)

Aplicando as propriedades do produto escalar,

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (|\bar{u}|\,\bar{e})\cdot(|\bar{v}|\,\bar{f}) = (|\bar{u}|\,|\bar{v}|)\,(\bar{e}\cdot\bar{f}).$$

Agora é suficiente observar que, pela primeira parte, $\bar{e}\cdot\bar{f}$ é o coseno do ângulo entre $\bar{e}$ e $\bar{f}$ que é igual ao ângulo entre $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

Os argumentos acima fornecem o seguinte: o ângulo α entre dois vetores é dado pela fórmula

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}. \qquad (2)$$

Isto termina a prova da propriedade. $\square$

Observação 1. *A fórmula em (2) implica que se $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ então os vetores são ortogonais: $|\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta = 0$, onde θ é o ângulo formado por $\bar{u}$ e $\bar{v}$, logo, como $|\bar{u}|\neq 0\neq|\bar{v}|$, $\cos\theta=0$, e, portanto, $\theta=\pi/2$.*

Exemplo 1. *Considere os vetores $\bar{u} = (1, k)$ e $\bar{v} = (2, 1)$. Determine k para que os vetores sejam ortogonais e para que formem um ângulo de $\pi/4$.*

Resposta: Para que os vetores sejam ortogonais devemos ter a relação

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 = 2 + k = 0,$$

logo $k = -2$.

Para que os vetores formem um ângulo de $\pi/4$ devemos ter a relação

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2 + k = \sqrt{5}\sqrt{1+k^2}\,(\sqrt{2}/2).$$

Agora é suficiente resolver a equação de segundo grau:

$$4 + k^2 + 4\,k = 5\,(1 + k^2)\,\frac{1}{2} = 0, \qquad 3\,k^2 - 2\,k - 3 = 0.$$

Ou seja,

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Tente justifivar geometricamente porquê neste caso temos duas soluções para k e no caso precedente (vetores ortogonais) apenas uma solução. $\square$

Exemplo 2. *Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e suas arestas.*

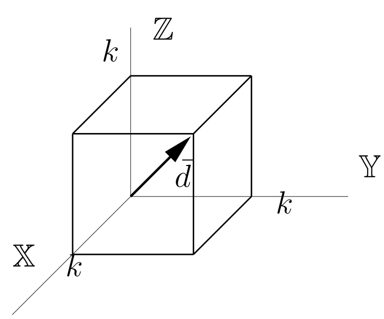

Figura 4: Cubo com vetor diagonal

Resposta: Consideraremos o cubo com arestas paralelas aos eixos coordenados. Sejam a origem $(0, 0, 0)$ e os pontos $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ e $(0, 0, k)$ quatro vértices do cubo (veja a figura). Considere agora o *vetor diagonal,* isto é, o vetor $\bar{d}$ obtido considerando a origem e o vértice oposto (k,k,k). Então, o ângulo θ entre o vetor diagonal e a aresta (por exemplo) $u_x = (k,0,0)$ é obtido como segue:

$$\bar{d}\cdot\bar{u}_x = (k,k,k)\cdot(k,0,0) = |\bar{d}|\cdot|\bar{u}_x|\,\cos\theta, \quad k^2 = \sqrt{3\,k^2}\,k\,\cos\theta,$$

Logo, $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$, e $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, onde escolhemos a determinação do arccos em $(0,\pi)$. Os ângulos com as outras arestas são iguais.

Observe que o ângulo obtido é sempre independente da escolha de k $\square$

2 A desigualdade triangular (novamente)

Usando as fórmulas do produto escalar podemos obter novamente a a *desigualdade triangular:*

Propriedade 2.1 (Desigualdade triangular)**.** *Dados dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ se verifica*

$$||\bar{u}+\bar{v}|| \leq ||\bar{u}| + ||\bar{v}||.$$

Além disto a igualdade $\|\bar{u}+\bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$ se verifica, e somente se, $\bar{u} = \lambda\bar{v}$ ou $\bar{v} = \lambda\bar{u}$ para algum número real λ (isto é, se os vetores são paralelos).

Prova: Observe que é suficiente provar

$$(\|\bar{u}+\bar{v}\|)^2 \leq (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2.$$

Temos as igualdades

$$\begin{aligned} (\|\bar{u}+\bar{v}\|)^2 &= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2, \\ (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2 &= \|\bar{u}\|^2 + 2\,\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, para provar a desigualdade é suficiente observar que

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,\cos\alpha \leq \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|,$$

onde α é o ângulo entre os vetores.

Para ver a segunda parte da propriedade, observe que se verifica

$$\|\bar{u}+\bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$$

se, e somente se,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \, \cos\alpha = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|,$$

ou seja, $\alpha = 0$. Logo $\bar{u} = \lambda \, \bar{v}$ para $\lambda \geq 0$. $\square$

Exercício 1. *Mostre a identidade:*

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = 2\,(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2).$$

Resposta: É suficiente observar que:

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\,\bar{u} \cdot \bar{v},$$

$$\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\,\bar{u} \cdot \bar{v}.$$

Somando as duas expressões obtemos,

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = 2\,\|\bar{u}\|^2 + 2\,\|\bar{v}\|^2,$$

obtendo o resultado pedido. $\square$

3 Projeção ortogonal em um vetor

Dado um vetor não nulo $\bar{u}$, a *projeção ortogonal* do vetor $\bar{v}$ no vetor $\bar{u}$ é um novo vetor (paralelo ao vetor $\bar{v}$) definido como:

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} \right) \bar{u}.$$

Interpretação geométrica da projeção ortogonal: o vetor $\pi_{\bar{u}}(\bar{v})$ é a *componente vetorial* do vetor $\bar{v}$ na direção $\bar{u}$. Dito de outra forma, o vetor $\bar{v}$ é a soma da sua projeção ortogunal no vetor $\bar{u}$ e um vetor ortogonal a $\bar{u}$ (veja a figura e o comentário a seguir).

Propriedade 3.1. *O vetor $(\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v}))$ é ortogonal a $\bar{u}$.*

Prova: Para comprovar a propriedade é suficiente calcular o produto escalar $\bar{u} \cdot (\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v}))$ e ver que é nulo:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v})) = \bar{u} \cdot \bar{v} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}\, \bar{u} \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \bar{v} = 0.$$

Assim a propriedade está provada. $\square$

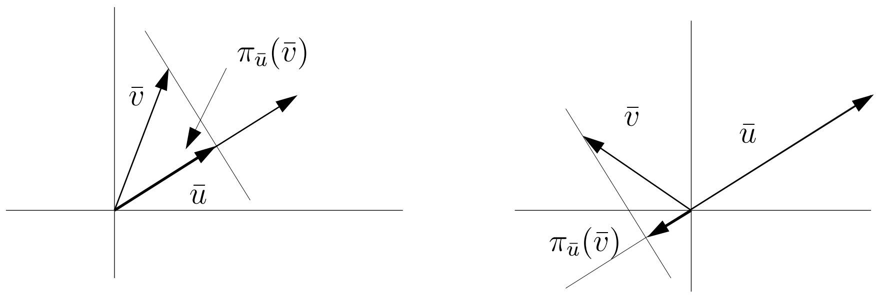

Figura 5: Projeção ortogonal

Exemplo 3. *Estude se é possível ter dois vetores diferentes e não nulos $\bar u$ e $\bar v$ tais que*

$$\pi_{\bar u}(\bar v) = \pi_{\bar v}(\bar u).$$

Resposta: Observe em primeiro lugar que se os vetores são ortogonais, isto é, $\bar u \cdot \bar v = 0$, então $\pi_{\bar u}(\bar v) = \pi_{\bar v}(\bar u) = \bar 0$, e a resposta é afirmativa.

Vejamos agora que acontece quando os vetores não são ortogonais. Neste caso a resposta é negativa. Em primeiro lugar, os vetores devem ser paralelos (justifique!). Logo $\bar v = \lambda\, \bar u$ para algum λ. Portanto, usando as fórmulas das projeções, temos,

$$\pi_{\bar u}(\bar v) = \frac{\bar u \cdot \bar v}{\bar u \cdot \bar u}\, \bar u = \frac{\lambda\, \|u\|^2}{\|u\|^2} \bar u = \lambda\, \bar u = \bar v.$$

Analogamente,

$$\pi_{\bar v}(\bar u) = \frac{\bar u \cdot \bar v}{\bar v \cdot \bar v}\, \bar v = \frac{\lambda\, \|u\|^2}{\lambda^2 \|u\|^2}\, \lambda\, \bar u = \bar u.$$

Logo a única possibilidade é $\bar u = \bar v$, logo a resposta é negativa.

Resumindo, $\pi_{\bar u}(\bar v) = \pi_{\bar v}(\bar u)$ se e somente $\bar u \cdot \bar v = 0$ ou $\bar u = \bar v$. $\square$