Álgebra Linear I - Aula 2

1. Vetores.
2. Distâncias.
3. Módulo de um vetor.

Roteiro

1 Vetores

Nesta seção lembraremos brevemente os vetores e suas operações básicas.

Definição de vetor $\bar{v}$. Vetor $\bar{v}$ determinado por dois pontos A e B (extremos inicial e final) vetor $\overline{AB}$.

Exemplos: Escreva os vetores determinados pelos pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 3, 4)$, e $C = (2, 3, 5)$ e $D = (3, 5, 8)$. Interprete.

1.1 Operações com vetores

Considere os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, e o número real λ.

- **soma (lei do paralelogramo):** $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$,
- **subtração ou diferença (lei do paralelogramo):** $u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$,
- **multiplicação pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:** $\lambda\, u = (\lambda\, u_1, \lambda\, u_2, \lambda\, u_3)$,
- **vetor nulo:** $\bar{0} = (0, 0, 0)$,
- **produto escalar (ou produto interno):** $u \cdot v = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3$ (o resultado é um número real!).

Vetores paralelos.

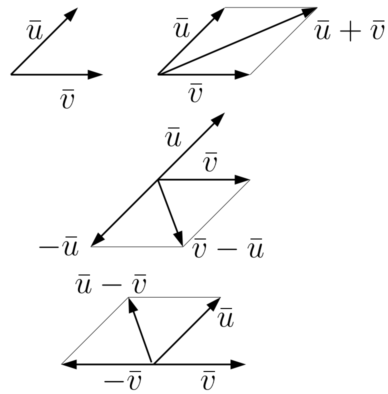

Figura 1: Lei do paralelogramo

Exemplo 1. *Considere o paralelogramo que tem como vértices os pontos* $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $C = (c_1, c_2, c_3)$. *Sabendo que* AB *e* AC *são lados do paralelogramo. determinemos o quarto vértice* D *do paralelogramo. Estude as possibilidades que aparecem quando* AB *e* AC *não são simultaneamente lados do paralelogramo.*

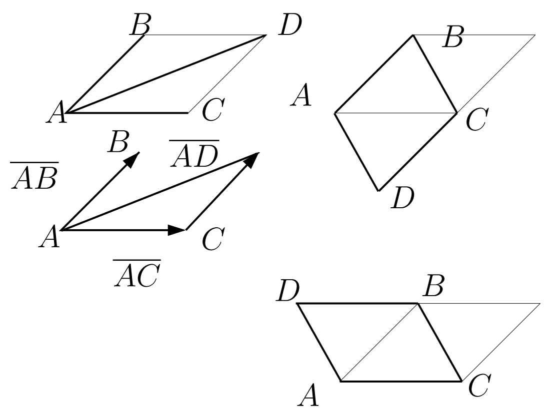

Figura 2: Os paralelogramos de vêrtices A, B, C e D

Resposta: Seja $X = (x_1, x_2, x_3)$ o quarto vértice do paralelogramo. Pela lei do paralelogramo, sabemos que:

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AX}.$$

Logo,

$$(b_1 + c_1 - 2\,a_1, b_2 + c_2 - 2\,a_2, b_3 + c_3 - 2\,a_3) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3).$$

Portanto, como os dois vetores são iguais as coordenadas devem coincidir:

$$x_1 = b_1 + c_1 - a_1, \quad x_2 = b_2 + c_2 - a_2, \quad x_3 = b_3 + c_3 - a_3.$$

Concluimos assim o exemplo. □

Exercício 1. *Encontre as coordenadas do vetor* $\bar{v}$ *de extremos inicial* $A = (4, 6, 1)$ *e final* $B = (1, 2, 3)$.

Exercício 2. *Considere o vetor* $\bar{v} = (1, 2, 3)$. *Sabendo que seu extremo inicial é* $(1, 2, 3)$ *determine seu extremo final.*

Exercício 3. *Considere os vetores* $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, 8)$ *e* $w = (6, -1, -4)$. *Seja* r *um vetor tal que* $2u - v + r = 2r + w$. *Determine* r. *Estude se existe um vetor* k *tal que* $2u - v + k = k + w$.

2 Distâncias

2.1 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B, denotada por $d(A, B)$, é o comprimento do segmento de extremos A e B. Calcularemos a distância entre dois pontos usando o teorema de Pitágoras.

Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^2$: dados dois pontos, $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ a distância entre eles é

$$d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

Para obter esta fórmula considere o triângulo retângulo Δ de vértices A, B e $C = (c, b)$. A hipotenusa do triângulo retângulo Δ é exatamente o segmento AB (cujo comprimento queremos calcular). Os catetos de Δ são os segmentos AC e CB paralelos aos eixos coordenados e cujos comprimentos são conhecidos. Agora é só aplicar o teorema de Pitágoras. Veja a figura.

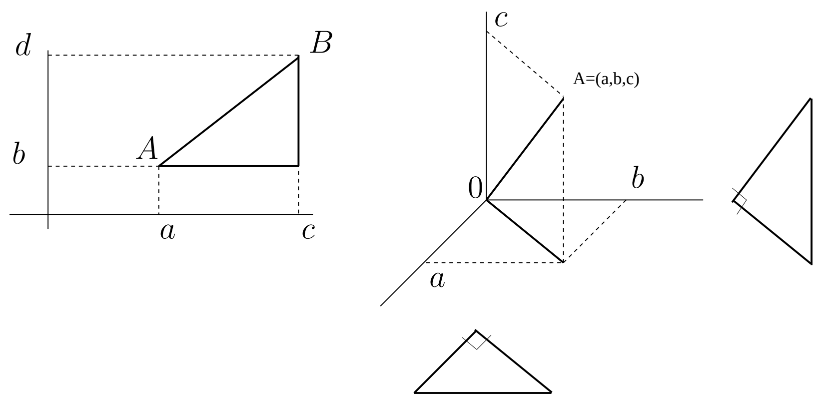

Figura 3: Distâncias

Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^3$: Dados dois pontos, $A = (a, b, c)$ e $B = (d, e, f)$, a distância entre eles é

$$d(A, B) = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}.$$

Esta fórmula é obtida como no caso anterior mas é necessário considerar dois passos. Considere o ponto auxiliar $C = (d, e, c)$. Os pontos A e C estão no mesmo plano $z = c$. Portanto, podemos calcular a distância entre A e C, nesse plano, usando o item precedente:

$$d(A, C) = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2}.$$

Veja agora que os vértices A, B e C determinam um novo trîngulo retângulo Υ cuja hipotenusa é o segemento AB e cujos catetos são os segmentos AC (cujo comprimento acabamos de calcular) e BC. Mas o comprimento do cateto BC é trivialmente $|f - c|$. Agora é só aplicar novamente o teorema de Pitágoras. Veja a figura 5.

Exemplo 2. *A* circunferência *de raio r e centro $P = (a, b)$ (conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ a distância r de P) é o conjunto de pontos $X = (x, y)$ tais que*

$$d(X, P) = r, \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

A superfície esférica *de raio r e centro P (conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ a distância r de $P = (a, b, c)$) é o conjunto de pontos $X = (x, y, z)$ tais que*

$$d(X, P) = r, \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r.$$

Exemplo 3 (Lugares geométricos). *Lugar geométrico L dos pontos equidistantes de $A = (a, 0, 0)$ e $B = (-a, 0, 0)$, isto é, o conjunto dos pontos X de $\mathbb{R}^3$ tais que $d(XA) = d(X, B)$).*

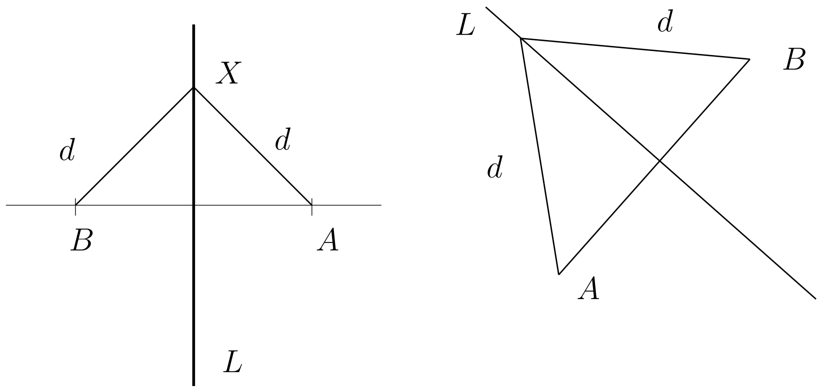

Figura 4: Lugar geométrico

Por definição, um ponto $X = (x, y, z)$ que pertence a L deve verificar,

$$d(X, A) = d(X, B),$$

onde d representa a distância. Como a distância é um número não negativo, isto é equivalente a

$$d(X, A)^2 = d(X, B)^2, \quad (x-a)^2+y^2+z^2 = (x+a)^2+y^2+z^2, \quad 4ax = 0, \quad x = 0.$$

Ou seja, o lugar geométrico procurado está formado pelos pontos em um plano coordenado (qual?).

Faça como exercício o caso geral $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Exemplo 4. *Determine o ponto do eixo $\mathbb{Y}$ equidistante de $A = (3, -2, 4)$ e $B = (-2, 6, 5)$.*

Resposta: Os pontos X que procuramos são da forma $X = (0, y, 0)$ (pois estão no eixo $\mathbb{Y}$) e devem verificar:

$$d(X, A) = d(X, B), \quad 9 + (y + 2)^2 + 16 = 4 + (y - 6)^2 + 25, \quad y = 9/4.$$

Dê agora um exemplo de dois pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que não existam pontos do eixo $\mathbb{Y}$ que lhes sejam equidistantes. (Resposta: $A = (5, 0)$ e $B = (7, 0)$, justifique). $\square$

3 Módulo ou norma de um vetor

A norma ou módulo do vetor $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$||\bar{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Geometricamente a fórmula significa que o módulo do vetor $\bar{u}$ é o comprimento do segmento OU, onde O é a origem e U é o ponto de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (u_1, u_2, u_3).

O módulo de um vetor do plano $\mathbb{R}^2$ é definido de forma análoga e tem o mesmo significado geométrico.

Observe que se verifica a seguinte relação entre módulo e produto escalar:

$$||\bar{u}||^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}.$$

Temos as seguintes propriedades do módulo de um vetor:

- $||u|| = 0$ se, e somente se, $u = 0$,
- *Desigualdade triangular*:

  $$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

  A interpretação geométrica da desigualdade é a seguinte: dado um triângulo a soma dos comprimentos de dois lados do mesmo é maior que o comprimento do terceiro lado),
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda\, v|| = |\lambda|\, ||v||$.

As provas da primeira e da terceira propriedades são simples e ficam como exercício. Vejamos a desigualdade triangular no caso (simplificado) $\bar{u} = (u_1, 0)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$. Observe que quadrando ambos os membros, a desigualdade triangular é equivalente a

$$(||u + v||)^2 = (u + v) \cdot (u + v) \leq (||u|| + ||v||)^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\, ||u||\, ||v||.$$

Desenvolvendo o primeiro membro da desigualdade temos:

$$(u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2\, u \cdot v + v \cdot v = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\, u \cdot v.$$

Desenvolvendo o segundo membro:

$$(||u|| + ||v||)^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,||u||\,||v||.$$

Portanto, a desigualdade triangular é equivalente a:

$$||u||^2 + ||v||^2 + 2\,u \cdot v \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,||u||\,||v||,$$

ou seja,

$$u \cdot v \leq ||u||\,||v||.$$

Usando que $u = (u_1, 0)$ e $v = (v_1, v_2)$, temos que a desigualdade triangular é equivalente a

$$u_1\,v_1 \leq \sqrt{u_1^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Mas esta desigualdade é sempre verdadeira pois

$$\sqrt{u_1^2} \geq |u_1| \quad \text{e} \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \geq |v_1|.$$

Não faremos a prova da desigualdade triangular no caso geral, apenas justificaremos a simplificação com uma figura e um breve comentário. Considere os pontos $U = (u_1, u_2)$, $V = (v_1, v_2)$ e a origem $O = (0, 0)$ que determinam um triângulo Δ. Queremos provar que o comprimento do lado UV é menor que a soma dos comprimentos dos lados OU e OV (este é exatamente o significado da desigualdade triangular). Para ver isto é suficiente girar o triângulo Δ obtendo um novo triângulo Δ' de vértices O, U' e V' cujos lados têm os mesmos comprimentos e de forma que o lado OU' agora é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$, isto é, o vetor u é da forma $(u_1, 0)$ e estamos no caso provado anteriormente.

Observe que

$$||\bar{u} + \bar{v}|| = ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||$$

se, e somente se, $\bar{v} = k\,\bar{u}$ onde k é um número real positivo. Em vista dos comentários anteriores e como $u_1\,v_1 \leq |u_1|\,|v_1|$ a igualdade se tem quando

$$\sqrt{u_1^2} = |u_1| \quad \text{e} \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |v_1| \quad (\text{ou seja } v_2 = 0)$$

e $u_1\,v_1 = |u_1|\,|v_1|$, (ou seja u_1 e v_1 têm o mesmo sinal).

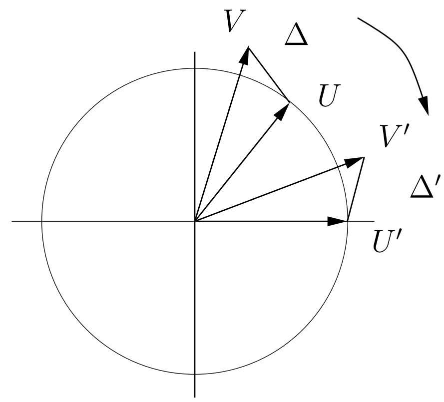

Figura 5: Desigualdade triangular

3.1 Vetores unitários

Um vetor $\bar{v}$ é unitário quando seu módulo é igual a 1.

A cada vetor $\bar{u}$ não nulo associamos o vetor $\frac{1}{||u||}\bar{u}$ que, por definição tem módulo 1, e tem a mesma direção e sentido que o vetor $\bar{u}$.

Exemplo 5. *Vetores unitários na circunferência trigonométrica de* $\mathbb{R}^2$*: são os vetores da forma* $(\cos t, \sin t)$ *onde* $t \in [0, 2\pi]$*. De fato, em* $\mathbb{R}^2$ *todos os vetores unitários são da forma* $(\cos t, \sin t)$*.*

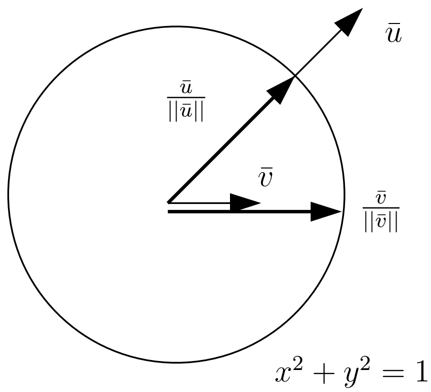

Figura 6: Vetores unitários associados (no plano)

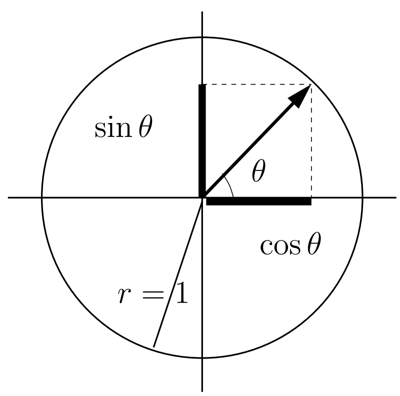

Figura 7: Vetores unitários na circunferência trigonométrica