Álgebra Linear I - Aula 15

1. Composição de transformações lineares.

2. Produto de matrizes.

3. Determinante do produto de matrizes.

1 Composição de transformações lineares

Considere duas transformações lineares T e L,

$$T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \quad L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell.$$

Se ℓ é igual a m temos que dado um vetor u de $\mathbb{R}^n$ sua imagem $L(u)$ está em $\mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^m$, que é o domínio de T, portanto podemos aplicar T a $L(u)$, obtendo $T(L(u))$. Neste caso podemos definir a composição $T \circ L$ como

$$T \circ L(u) = T(L(u)).$$

Analogamente, se k é igual a n, dado qualquer vetor v de $\mathbb{R}^m$ sua imagem $T(v)$ está em $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$, que é o domínio de L, portanto podemos aplicar L a $T(v)$, obtendo $L(T(v))$. Neste caso podemos definir a composição $L \circ T$.

Dadas duas transformações lineares

$$T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \quad L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

a composição $T \circ L$

$$T \circ L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

é uma nova transformação linear:

- $T \circ L(u+v) = T(L(u+v)) = T(L(u)+L(v)) = T(L(u)) + T(L(v)) = T \circ L(u) + T \circ L(v)$,

- $T \circ L(\sigma u) = T(L(\sigma u)) = T(\sigma L(u)) = \sigma T(L(u)) = \sigma(T \circ L(u))$.

Observação: Como no caso do produto de matrizes, a composição de transformações lineares **não é comutativa**. Em alguns casos a composição $T \circ L$ pode estar definida e a composição $L \circ T$ não. Mesmo quando as duas composições estão definidas pode acontecer que $T \circ L \neq L \circ T$.

Veremos a seguir alguns exemplos:

(1) Considere os cisalhamentos

$$T(x,y) = (x + \alpha\, y, y), \quad \text{e} \quad L(x,y) = (x, \beta\, x + y).$$

Então

$$L \circ T(x,y) = L((x + \alpha\, y, y)) = (x + \alpha\, y, y + \beta\, \alpha\, y + \beta\, x),$$

e

$$T \circ L(x,y) = T((x, \beta\, x + y)) = (x + \alpha\, y + \alpha\, \beta\, x, y + \beta x),$$

que obviamente são (em geral) diferentes.

(2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear projeção ortogonal na reta $(t,0,0)$ e seja $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$L(v) = v \times u, \quad \text{onde } u = (1,-1,1).$$

Então

$$L \circ T(x,y,z) = L((x,0,0)) = (0,-x,-x),$$

e

$$T \circ L(x,y,z) = T((y+z, -x+z, -x-y)) = (y+z, 0, 0)$$

que são obviamente transformações lineares distintas, por exemplo:

$$L \circ T(1,2,3) = L((1,0,0)) = (0,-1,-1),$$

mas

$$T \circ L(1,2,3) = T((5,2,-3)) = (5,0,0)$$

Observe que, neste caso, $L \circ T(v) = T \circ L(v)$ se, e somente se, $v = (0,k,-k), k \in \mathbb{R}$. Nestas condições $L \circ T(0,k,-k) = T \circ L(0,k,-k) = (0,0,0)$ o que mostra que essas transformações, $L \circ T$ e $T \circ L$, não são injetoras. Verifique também que elas não são sobrejetoras!

(3) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x, y, x + y)$ e seja $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (2x, y + z)$. Então

$$L \circ T(x, y) = L((x, y, x + y)) = (2x, x + 2y),$$

e

$$T \circ L(x, y, z) = T((2x, y + z)) = (2x, y + z, 2x + y + z)$$

que são obviamente transformações lineares distintas. Observe inclusive que $L \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ enquanto que $T \circ L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Vale a pena você conferir que, neste caso, $L \circ T$ é injetora e sobrejetora enquanto que $T \circ L$ não é injetora nem sobrejetora.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear identidade, ou seja, $T(x, y) = (x, y)$ e seja $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y) = (x, 0, y)$. Então

$$L \circ T(x, y) = L((x, y)) = (x, 0, y),$$

mas, neste caso $T \circ L$ não está definida.

Para pensar: apresente, se possível, duas transformações lineares T e L de modo que para todo vetor v se tenha $T \circ L(v) = L \circ T(v)$. Não vale $T = L = Id$, nem $T(v) = 2$ e $L(w) = 3\,w$ e coisas similares!

2 Produto de matrizes

A seguir calcularemos a matriz associada à composição de duas transformações lineares. Por simplicidade, faremos os cálculos em $\mathbb{R}^2$, os cálculos em $\mathbb{R}^3$ são idênticos.

Sejam T e L transformações lineares cujas matrizes são

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad [L] = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a matriz de $L \circ T$ é suficiente calcular $L \circ T(1, 0)$ e $L \circ T(0, 1)$, que serão as colunas da nova matriz.

$$\begin{aligned} L\circ T(1,0) &= L((a_1,b_1)) = a_1\,L(1,0)+b_1\,L(0,1) = \\ &= a_1\,(c_1,d_1)+b_1\,(c_2,d_2) = \\ &= (a_1\,c_1+b_1\,c_2, a_1\,d_1+b_1\,d_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\circ T\,(0,1) &= L((a_2,b_2)) = a_2\,L(1,0)+b_2\,L(0,1) = \\ &= a_2\,(c_1,d_1)+b_2\,(c_2,d_2) = \\ &= (a_2\,c_1+b_2\,c_2, a_2\,d_1+b_2\,d_2). \end{aligned}$$

Obtendo a nova matriz:

$$[L\circ T] = \begin{pmatrix} c_1\,a_1+c_2\,b_1 & c_1\,a_2+c_2\,b_2 \\ d_1\,a_1+d_2\,b_1 & d_1\,a_2+d_2\,b_2. \end{pmatrix}.$$

Finalmente, observamos que os cálculos feitos para calcular o produto de duas matrizes fornece a seguinte regra geral. Considere os vetores $c=(c_1,c_2)$ e $d=(d_1,d_2)$ que determinam as linhas de $[L]$, e os vetores $u=(a_1,b_1)$ e $v=(a_2,b_2)$ que determinam as colunas de $[T]$. Temos a seguinte expressão:

$$[L][T] = \begin{pmatrix} c\cdot u & c\cdot v \\ d\cdot u & d\cdot v \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, vamos verificar a matriz associada à composição de duas transformações lineares nos quatro exemplos que apresentamos acima:

(1) L e T são dois cisalhamentos definidos por:

$$T(x,y)=(x+\alpha\,y,y), \quad \text{e} \quad L(x,y)=(x,\beta\,x+y).$$

Nestas condições:

$$[L\circ T]=[L][T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \alpha\beta+1 \end{pmatrix}$$

e

$$[T\circ L]=[T][L]=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\alpha\beta & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear projeção ortogonal na reta $(t,0,0)$ e $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear definida por $L(v)=v\times u$ para $u=(1,-1,1)$.

Nestas condições:

$$[L \circ T] = [L][T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[T \circ L] = [T][L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear definida por $T(x, y) = (x, y, x+y)$ e $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (2x, y+z)$. Nestas condições:

$$[L \circ T] = [L][T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

e

$$[T \circ L] = [T][L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação linear identidade, ou seja, $T(x, y) = (x, y)$ e $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear definida por $L(x, y) = (x, 0, y)$. Nestas condições:

$$[L \circ T] = [L][T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o produto de matrizes $[T][L]$ não está definido.

3 Determinante do produto de duas matrizes

Considere as matrizes triangulares

$$[A] \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [B] \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Denote por $\det[M]$ o determinante de uma matriz quadrada (mesmo número de linhas que de colunas). Observe que

$$\det[A] = a\,c \quad \det[B] = d\,f.$$

Observe que

$$[AB] = [A][B] = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

e que

$$\det[AB] = (a\,d)\,(c\,f) = \det[A]\,\det[B].$$

Neste caso temos que *o determinante da matriz produto é o produto dos determinantes.*

De fato, sempre, o determinante do produto de duas matrizes (quadradas) é o produto dos determinantes das duas matrizes. Uma justificativa é a seguinte: reduzindo à forma escalonada, o determinante não muda, assim a afirmação decorre da afirmação sobre o produto de matrizes triangulares.

Os exemplos (1) e (2) da seção acima, envolvem a composição de transformações lineares de domínio e contra-domínio iguais. Logo, as matrizes representantes dessas transformações são quadradas e, desta forma, é possível calcular seus respectivos determinantes. Observe que, nestes casos, o determinante da matriz representante da transformação composição é o produto dos determinantes das matrizes de cada uma das transformações envolvidas na composição. Conferindo então, temos:

(1) L e T são dois cisalhamentos definidos por:

$$T(x,y) = (x + \alpha\,y, y), \quad \text{e} \quad L(x,y) = (x, \beta\,x + y).$$

Nestas condições:

$$\det[L \circ T] = \det[L]\,\det[T] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \alpha\beta + 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear projeção ortogonal na reta $(t,0,0)$ e $L : R^3 \longrightarrow R^3$ é a transformação linear definida por $L(v) = v \times u$ para

$u = (1, -1, 1)$. Nestas condições:

$$\det[L \circ T] = \det[L]\det[T] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$