Álgebra Linear I - Aula 14

1. Forma matricial de uma transformação linear. Exemplos.

1 Forma matricial de uma matriz. Exemplos

Exemplos 1.

- As transformações lineares identidade e nula têm como matrizes associadas as matrizes identidade (diagonal igual a 1 e todos os outros coeficientes nulos) e a matriz nula (todos os coeficientes são zero).

- As matrizes das transformaçõeso lineares de cisalhamento horizontal $H(x,y) = (x, \alpha x + y)$ e vertical $V(x,y) = (x + \alpha y, y)$ são

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [V] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Lembrando que a projeção ortogonal no vetor unitário (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ é da forma

$$P(x,y,z) = (a^2x + aby + acz, abx + b^2y + bcz, acx + bcy + c^2z).$$

temos

$$[P] = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes projeções ortogonais nos eixos $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$ são, respetivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, lembrando as definições da ortogonais em um plano temos que a projeções ortogonais nos planos $\mathbb{XY}$, $\mathbb{X}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{YZ}$ são da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, para a projeção ortogonal P no plano $\mathbb{XY}$ é suficiente observar que

$$P(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}).$$

- Lembrando a fórmula das reflexões R e S (em $\mathbb{R}^2$) em torno dos eixos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ e T em torno da origem

$$R(x,y) = (x,-y), \quad S(x,y) = (-x,y), \quad T(x,y) = (-x,-y),$$

(veja a última aula) temos

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Lembrando a expressão da rotação de ângulo θ no sentido anti-horário

$$R_\theta(x,y) = ((\cos\theta)\, x - (\mathrm{sen}\theta)\, y, (\cos\theta\,) y + (\mathrm{sen}\theta)\, x),$$

temos

$$[R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Consideremos agora a de projeção T na reta $ax + by = 0$ segundo a direção do vetor $v = (c, d)$. Pelos resultados da aula anterior,

$$T(x,y) = \left(x - \frac{ax+by}{ac+bd}\, c, y - \frac{ax+by)}{ac+bd}\, d \right).$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{ac}{ac+bd} & -\dfrac{bc}{ac+bd} \\ -\dfrac{ad}{ac+bd} & 1 - \dfrac{bd}{ac+bd} \end{pmatrix}.$$

- Determinaremos a seguir a matriz da projeção ortogonal no plano $x + y + z =$. Para isso temos que determinar $P(1,0,0)$, $P(0,1,0)$ e $P(0,0,1)$.

Para isso consideramos a base ortogonal

$$\{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,-1), u_3 = (1,-2,1),$$

E observamos que

$$P(u_1) = 0, \quad P(u_2) = u_2, \quad P(u_3) = u_3.$$

Para determinar $P(1,0,0)$ Escrevemos

$$(1,0,0) = x\,(1,1,1) + y\,(1,0,-1) + z\,(1,-2,1).$$

Observe que

$$\begin{aligned} P(1,0,0) &= P\big(x\,(1,1,1) + y\,(1,0,-1) + z\,(1,-2,1)\big) = \\ &= x\,P(1,1,1) + y\,P(1,0,-1) + z\,P(1,-2,1) \\ &= y\,(1,0,-1) + z\,(1,-2,1). \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente x é irrelevante.

Calculamos y e z. Como a base é ortogonal temos

$$(1,0,0)\cdot(1,0,-1) = y\,(1,0,-1)\cdot(1,0,-1) = 2\,y, \quad y = 1/2$$

e

$$(1,0,0)\cdot(1,-2,1) = z\,(1,-2,1)\cdot(1,-2,1) = 6\,z, \quad z = 1/6.$$

Logo

$$P(1,0,0) = 1/2\,(1,0,-1) + 1/6\,(1,-2,1) = (2/3,-1/3,-1/3).$$

Para determinar $P(0,1,0)$ escrevemos

$$(0,1,0) = x\,(1,1,1) + y\,(1,0,-1) + z\,(1,-2,1)$$

e observamos que

$$P(0,1,0) = y\,(1,0,-1) + z\,(1,-2,1).$$

Calculamos y e z. Como a base é ortogonal temos

$$(0,1,0)\cdot(1,0,-1) = y\,(1,0,-1)\cdot(1,0,-1) = 2\,y, \quad y = 0$$

e

$$(0,1,0)\cdot(1,-2,1) = z\,(1,-2,1)\cdot(1,-2,1) = 6\,z, \quad z = -1/3.$$

Logo

$$P(0,1,0) = (-1/3,2/3,-1/3).$$

Raciocinando de forma similar obtemos

$$P(0,0,1) = (-1/3, -1/3, 2/3).$$

Portanto

$$[P] = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1. Considere as retas

$$r\colon (t, 2\,t, t),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s\colon (t+1, 2\,t, t-5),\ t \in \mathbb{R}$$

e o plano

$$\pi\colon x + y + z = 0.$$

(a) Determine a matriz (na base canônica) da transformação linear T *projeção no plano π na direção da reta r.*

(b) Determine a matriz (na base canônica) da transformação linear L *projeção na reta r na direção do plano π.*

(c) Determine a forma matricial (na base canônica) da transformação afim A *projeção na reta s na direção do plano π.*

Resposta:
a) Observe que $(1,2,1)$ é um vetor paralelo à direção de projeção, logo

$$T(1,2,1) = (0,0,0)$$

Temos que o vetor $(-1,2,-1)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(-1,2,-1) = (-1,2,-1)$$

Somando as igualdades,

$$T(0,4,0) = T((-1,2,-1) + (1,2,1)) = (-1,2,-1).$$

Portanto

$$T(0,1,0) = (-1/4, 2/4, -1/4).$$

Temos também que que o vetor $(1,-1,0)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(1,0,0) - T(0,1,0) = T(1,-1,0) = (1,-1,0).$$

Isto é

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= T(0,1,0) + (1,-1,0) = \\ &= (-1/4, 2/4, -1/4) + (1,-1,0) = \\ &= (3/4, -2/4, -1/4). \end{aligned}$$

Finalmente, o vetor $(0,-1,1)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(0,0,1) - T(0,1,0) = T(0,-1,1) = (0,-1,1).$$

Isto é

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(0,1,0) + (0,-1,1) = \\ &= (-1/4, 2/4, -1/4) + (0,-1,1) = \\ &= (-1/4, -2/4, 3/4). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

V. pode resolver o problema usando geometria analítica. Temos que $T(a,b,c)$ é o vetor $\overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta $(a+t, b+2\,t, c+t)$ e o plano $x+y+z=0$. Esta interseção ocorre quando

$$a+t+b+2\,t+c+t=0, \quad 4\,t = -a-b-c, \quad t = -\frac{a+b+c}{4}.$$

Isto é

$$T(a,b,c) = \left(\frac{3\,a-b-c}{4}, \frac{-2\,a+2\,b-2\,c}{4}, \frac{-a-b+3\,c}{4} \right).$$

Tomando os vetores $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (3/4, -2/4, -1/4), \\ T(0,1,0) &= (-1/4, 2/4, -1/4), \\ T(0,0,1) &= (-1/4, -2/4, 3/4). \end{aligned}$$

b) Raciocinamos como no primeiro item. Observe que $(1,2,1)$ é um vetor da reta de projeção, logo

$$L(1,2,1) = (1,2,1)$$

Temos que o vetor $(-1,2,-1)$ é um vetor paralelo à direção de projeção. Portanto,

$$L(-1,2,-1) = (0,0,0)$$

Somando as igualdades,

$$L(0,4,0) = L((1,2,1) + (-1,2,-1)) = (1,2,1).$$

Portanto

$$L(0,1,0) = (1/4, 2/4, 1/4).$$

Temos também que que o vetor $(1,-1,0)$ é paralelo ao plano direção projeção. Portanto,

$$L(1,0,0) - L(0,1,0) = L(1,-1,0) = (0,0,0).$$

Isto é

$$L(1,0,0) = L(0,1,0) = (1/4, 2/4, 1/4).$$

Analogamente, o vetor $(0,-1,1)$ é paralelo à direção projeção. Portanto,

$$L(0,0,1) - L(0,1,0) = L(0,-1,1) = (0,0,0).$$

Isto é

$$L(0,0,1) = L(0,1,0) = (1/4, 2/4, 1/4).$$

Portanto,

$$[L] = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

V. pode usar também geometria analítica como no caso anterior. Outra possibilidade é observar que dado um vetor v se verifica

$$v = v_r + v_\pi,$$

onde v_r é um vetor paralelo à reta r e v_π é paralelo ao plano π. Portanto,

$$T(v) = v_\pi, \quad L(v) = v_r.$$

Ou seja,

$$v = T(v) + L(v) = Id(v).$$

Isto significa que a soma das matrizes $[T]$ e $[L]$ é a matriz identidade, isto é,

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

c) Para determinar a forma matricial devemos achar $A(0,0,0)$, obtido como a interseção do plano π e a reta s. Ou seja, devemos encontrar o valor de t que verifica

$$(t+1) + (2\,t) + (t-5) = 0, \quad 4\,t = 4, \quad t = 1.$$

Logo

$$A(0,0,0) = (2,2,-4).$$

Assim a forma matricial de A é

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 2. *Determine a matriz da transformação linear*

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = u \times v,$$

onde $v = (1,1,1)$.

Resposta: Para isto determinaremos a forma geral de T. Observe que

$$T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, z-x, x-y).$$

Portanto,

$$T(1,0,0) = (0,-1,1), \quad T(0,1,0) = (1,0,-1), \quad T(0,0,1) = (-1,1,0).$$

Finalmente, obtemos

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplo 3. *Determinar a matriz da transformação linear*

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = (u \cdot v)\, w,$$

onde $v = (1, 1, 1)$ *e* $w = (1, 2, 3)$.

Resposta: Calcularemos as imagens dos vetores **i**, **j** e **k**. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= ((1,0,0)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3), \\ T(0,1,0) &= ((0,1,0)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3), \\ T(0,0,1) &= ((0,0,1)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Analogamente, dada uma matriz $[T]$ temos uma transformação linear T associada a dita matriz. Dada a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

sua transformação linear associada é

$$T(x, y, z) = (a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z, b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z, c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z).$$

Ou de outra forma, escrevendo os vetores em froma coluna,

$$[T] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$