Álgebra Linear I - Aula 13

1. Determinação de uma transformação linear.
2. Matrizes.
3. Forma matricial de uma transformação linear.

1 Determinação de uma transformação linear

Uma transformação linear T fica totalmente determinada quando são conhecidas as imagens dos vetores de uma base do espaço de *saida* de T (domínio). Por exemplo, suponhamos que T é uma transformação linear cujo domínio é $\mathbb{R}^3$. Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha determinadas as imagens dos vetores da base:

$$w_1 = T(v_1), \quad w_2 = T(v_2), \quad w_3 = T(v_3).$$

Como β é uma base temos que dado qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$,

$$v = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3$$

para certos (únicos) λ_1, λ_2 e λ_3. Portanto, como T é uma transformação linear,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3) = \lambda_1\, T(v_1) + \lambda_2\, T(v_2) + \lambda_3\, T(v_3) = \\ &= \lambda_1\, w_1 + \lambda_2\, w_2 + \lambda_3\, w_3, \end{aligned}$$

logo a imagem $T(v)$ de qualquer vetor v está determinada pelas imagens dos vetores da base β.

Exemplo 1. *Estudas se existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= (2,1), \quad & T(1,1,1) &= (1,1), \\ T(1,1,0) &= (2,3), \quad & T(3,1,1) &= (5,6). \end{aligned}$$

Resposta: Observe que os vetores $(1,0,1),(1,1,1)$ e $(1,1,0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Para isto é suficiente verificar que não são coplanares (ou que são linearmente independentes),

$$(1,0,1)\cdot((1,1,1)\times(1,1,0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Consideramos a base

$$\beta = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)\}$$

Portanto, caso a transformação linear T exista, ela está totalmente determinada pelas imagens dos três vetores da base β. Verifique que:

$$(3,1,1) = 2\,(1,0,1) - (1,1,1) + 2\,(1,1,0).$$

Portanto, como T é linear,

$$\begin{aligned} T(3,1,1) &= 2\,T(1,0,1) - T(1,1,1) + 2\,T(1,1,0) = \\ &= 2\,(2,1) - (1,1) + 2\,(2,3) = (7,9) \neq (5,6). \end{aligned}$$

Portanto, não existe tal transformação linear. □

Exemplo 2. *Determine uma transformação linear T que transforme o paralelogramo de vértices*

$$A=(0,0), \quad B=(2,1), \quad C=(1,4) \quad e \quad D=(3,5),$$

(os lados do paralelogramo são os segmentos AB, AC, BD e CD) no paralelogramo de vértices

$$A'=A=(0,0), \quad B'=(-1,-1), \quad C'=(2,6), \quad e \quad D^1=(1,5),$$

(os lados são $A'B'$, $A'C'$, $B'D'$ e $C'D'$).

Resposta: Pelas afirmações acima, uma estratégia é considerar a transformação que leva os lados do primeiro retângulo nos lados do segundo. Mais precisamente, considere os vetores

$$\begin{aligned} u &= \overline{AB} = (2,1), \qquad & v &= \overline{AC} = (1,4), \\ w &= \overline{A'B'} = (-1,-1), \qquad & \ell &= \overline{A'C'} = (2,6) \end{aligned}$$

e a transformação linear T definida por

$$T(u) = T(2,1) = w = (-1,-1), \quad T(v) = T(1,4) = (2,6) = \ell.$$

Como $\{(2,1),(1,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, a transformação T está totalmente determinada. Por construção, T transforma os vértices do primeiro paralelogramo nos vértices do segundo paralelogramo (confira). Afirmamos que também transforma os lados do primeiro paralelogramo nos lados do segundo paralelogramo.

Vejamos, por exemplo, que T transforma o segmento (lado) BD no segmento (lado) $B'D'$. Observe primeiro que o segmento BD está formado pelos pontos X tais que

$$\overline{OX} = \overline{AX} = \overline{AB} + t\,\overline{AC} = u + t\,v, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Analogamente, o segmento $B'D'$ está formado pelos pontos Y tais que

$$\overline{OY} = \overline{A'X} = \overline{A'B'} + t\,\overline{A'C'} = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Considere um ponto X do lado BD, então, como T é linear,

$$\overline{OY} = T(\overline{OX}) = T(u) + t\,T(v) = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Portanto, o extremo Y do vetor $T(\overline{OX})$ verifica a condição de pertencer ao segmento $B'D'$. Portanto, a imagem do lado BD do primeiro paralelogramo está contida no lado $B'D'$ do segundo paralelogramo. Para ver a inclusão em sentido contrário, considere qualquer ponto Y do segmento $B'D'$ e escreva

$$\overline{OY} = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Por definição, temos,

$$\overline{OY} = w + t\,\ell = T(u) + t\,T(v) = T(u + t\,v) = T(\overline{OX}).$$

Como $t \in [0,1]$, temos que o ponto X pertence ao lado BD.

Um raciocínio idêntico (que omitimos) mostra que a transformação leva os lados AB, AC, BD e CD do primeiro paralelogramo nos lados $A'B'$, $A'C'$, $B'D'$ e $C'D'$, respetivamente, do segundo paralelogramo. $\square$

2 Matrizes

Uma matriz $n \times m$ (onde n representa o número de linhas e m o número de colunas) M é definida como segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Dizemos que $(a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,m})$ é a j-ésima linha de A e que $(a_{1,j}, a_{2,j}, a_{n,j})$ é a j-ésima coluna de A. Quando $n = m$, dizemos que a matriz é quadrada.

Dadas duas matrizes A e B das mesmas dimensões $n \times m$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix},$$

definimos a *soma* e a *substração* de matrizes $S = A + B$ e $D = A - B$, como segue,

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix},$$

e

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & \dots & a_{1,m} - b_{1,m} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & \dots & a_{2,m} - b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & a_{n,2} - b_{n,2} & \dots & a_{n,m} - b_{n,m} \end{pmatrix},$$

isto é, S e D são matrizes das mesmas dimenões $n \times m$ que A e B, onde os coefientes $s_{i,j}$ e $d_{i,j}$ das matrizes soma S e substração D são:

$$s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad d_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}.$$

A multiplicação da matriz A pelo escalar λ é a matriz E, $n \times m$, cujos coeficientes são

$$e_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}.$$

Finalmente, dadas matrizes A, $n \times m$, e B, $r \times k$, o produto $P = A\,B$ está definido quando $r = m$ e é uma matriz $n \times k$, o coeficiente $p_{i,j}$ da matriz produto é dado por

$$p_{i,j} = a_{i,1}\,b_{1,j} + a_{i,2}\,b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\,b_{m,j}.$$

Mais tarde veremos como o produto de duas matrizes aparece de forma natural: a regra de multiplicação ficará clara quando estudemos a composição de transformações lineares.

V. pode interpretar os coeficientes da matriz produto como segue. Escreva

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix},$$

onde cada ℓ_i é um vetor *linha* de $\mathbb{R}^m$ da forma

$$\ell_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m}).$$

Analogamente, escreva

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_k \end{pmatrix}$$

cada c_j é um vetor *coluna* de $\mathbb{R}^m$ da forma

$$c_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Então, $p_{i,j}$ é obtido como o produto escalar dos vetores ℓ_i e c_j,

$$p_{i,j} = \ell_i \cdot c_j.$$

Observe que o produto $A\,B$ de duas matrizes pode estar definido e o produto $B\,A$ pode não esta-lo. Por exemplo, se a matriz A é 3×2 e B é

2×1. Neste caso $A\,B$ é uma matriz 3×1 e não é possível fazer o produto $B\,A$.

Também pode acontecer que os dois produtos estejam definidos e os resultados dos produtos serem matrizes de dimensões diferentes. Por exemplo, se A é 3×2 e B é 2×3, temos que $A\,B$ está definido e é uma matriz 3×3, e $A\,B$ também está definido e é uma matriz 2×2. Portanto, o produto de matrizes não é (em geral) comutativo: mesmo quando as matrizes $A\,B$ e $B\,A$ têm as mesmas dimensões. Um exemplo desta situação é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os dois produtos estão definidos, porém

$$A\,B \neq B\,A.$$

3 Forma matricial de uma transformação linear

Lembramos que se T e L são transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são da forma:

$$\begin{aligned}
&T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\
&\qquad T(x,y,z) = (a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z, b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z, c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z), \\
&L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
&\qquad L(x,y) = (a_1\,x + a_2\,y, b_1\,x + b_2\,y).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&T(1,0,0) = (a_1, b_1, c_1), \\
&T(0,1,0) = (a_2, b_2, c_2), \\
&T(0,0,1) = (a_3, b_3, c_3), \\
&L(1,0) = (a_1, b_1), \\
&L(0,1) = (a_2, b_2).
\end{aligned}$$

As transformações lineares T e L têm as seguintes representações matriciais (representando os vetores na sua forma coluna):

$$[T] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad [L] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Isto significa que se escrevemos um vetor v na forma coluna $[v]$ e fazemos o produto das matrizes $[T]\,[v]$ obtemos como resultado o vetor $T(v)$ na forma coluna: seja $v = (x, y, z)$, então

$$[v] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$[T] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z \\ b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z \\ c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z \end{pmatrix}.$$

Pelos comentários já feitos temos a seguinte interpretação das colunas da matriz $[T]$.

- A primeira coluna é a imagem de $T(1, 0, 0)$,
- a segunda coluna é a imagem de $T(0, 1, 0)$,
- a última coluna é a imagem de $T(0, 0, 1)$.

Comentários análogos podem ser feitos para a matriz $[L]$.