Álgebra Linear I - Aula 12

1. Rotações no plano.
2. Projeções
3. Espelhamentos
4. Caso geral.

Roteiro

1 Exemplos de Transformações lineares (continuação)

1.1 Rotações no plano

A Rotação no plano de ângulo θ no sentido anti-horário é definida como:

$$R_\theta(x,y) = ((\cos\theta)\,x - (\operatorname{sen}\theta)\,y, (\cos\theta\,)y + (\operatorname{sen}\theta)\,x),$$

veja a Figura 1.

Esta transformaçõe é uma caso particular das descritas acima, onde

$$a = \cos\theta, \quad b = -\operatorname{sen}\theta, \quad c = \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad d = \cos\theta.$$

Calcularemos o ângulo formado entre um vetor u e sua imagem $R_\theta(u)$, e veremos que este ângulo é θ. Considere o vetor $u = (a,b)$. Primeiro veremos que os módulos de u e $R_\theta(u)$ são iguais:

$$\begin{aligned}
|R_\theta(a,b)|^2 &= ((\cos\theta)^2\,a^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2\,b^2 - 2\,(\cos\theta)\,a\,(\operatorname{sen}\theta)\,b + \\
&+ (\cos\theta)^2\,b^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2\,a^2 + 2\,(\cos\theta)\,a\,(\operatorname{sen}\theta)\,b = \\
&= ((\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2)\,a^2 + ((\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2)\,b^2) = \\
&= a^2 + b^2 = |(a,b)|^2.
\end{aligned}$$

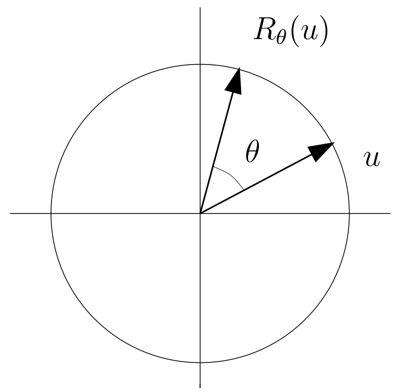

Figura 1: Rotação

Por outra parte, e como $|u| = |R_\theta(u)|$,

$$u \cdot R_\theta(u) = |u|\,|R_\theta(u)| \cos\alpha = |u|^2 \cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado por u e $R_\theta(u)$. Calculemos agora o ângulo α.

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot R_\theta(a,b) \;&= (a,b)\cdot((\cos\theta)\,a - (\operatorname{sen}\theta)\,b, (\cos\theta)\,b + (\operatorname{sen}\theta)\,a) = \\ &= (\cos\theta)\,a^2 - (\operatorname{sen}\theta)\,a\,b + (\operatorname{sen}\theta)\,a\,b + (\cos\theta)\,b^2 = \\ &= (\cos\theta)\,(a^2+b^2) = \cos\theta\,|u|^2.\end{aligned}$$

Das duas fórmulas anteriores temos que o ângulo entre u e $R_\theta(u)$ é exatamente o ângulo de rotação θ.

Usando o mesmo tipo de raciocínio v. pode provar que o ângulo entre os vetores u e v é igual ao ângulo entre $R_\theta(u)$ e $R_\theta(v)$. Deixamos a prova da afirmação como exercício.

1.2 Projeção em uma reta r

Estudaremos agora a transformação linear T *projeção em uma reta r de $\mathbb{R}^2$ na direção do vetor v*, onde a reta r contém a origem e o vetor v não é paralela à reta, veja a Figura 2.

Esta transformação é definida como segue. Considere a reta de projeção r de equação cartesiana $ax + by = 0$ e o vetor $v = (c, d)$ que determina a

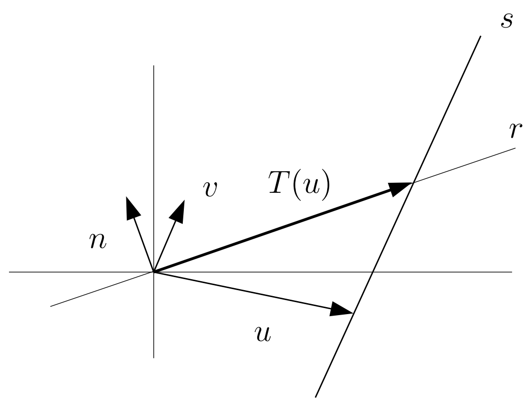

Figura 2: Projeção não ortogonal em uma reta

direção de projeção. A imagem do vetor $u = (u_1, u_2)$ é o vetor $\overline{OP}$, onde P é o ponto de interseção das retas s de equação paramétrica

$$s\colon (u_1 + t\,c, u_2 + t\,d), \quad t \in \mathbb{R},$$

e a reta r de projeção, $r\colon ax + by = 0$ (equação cartesiana). Determinaremos o valor de t que fornece o ponto de interseção,

$$a(u_1 + t\,c) + b(u_2 + t\,d) = 0, \quad t(a\,c + b\,d) = -(a\,u_1 + b\,u_2),$$

isto é,

$$t = \frac{-(a\,u_1 + b\,u_2)}{a\,c + b\,d}.$$

Observe que se verifica

$$a\,c + b\,d \neq 0,$$

isto decorre do fato da direção de projeção não ser paralela à reta de projeção, ou seja (c, d) não é ortogonal ao vetor normal $n = (a, b)$ da reta (isto é, $0 \neq (c, d) \cdot (a, b) = a\,c + b\,d$). Logo

$$T(u_1, u_2) = \left(u_1 - \frac{a\,c\,u_1 + b\,c\,u_2}{a\,c + b\,d}, u_2 - \frac{a\,d\,u_1 + b\,d\,u_2}{a\,c + b\,d} \right).$$

Pela discussão acima, T é uma transformação linear.

Outra forma de obter a transformação anterior é a seguinte. Considere uma base $\beta = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que u é um vetor diretor da reta de projeção e v é a direção de projeção. Como estes vetores não são paralelos temos que β é uma base.

Dado um vetor w escrevemos w na base β: $w = x\,u + y\,v$. Então consideramos a transformação definida como

$$S(w) = x\,u.$$

Deixamos como exercício verificar que S é uma transformação linear. Observamos que esta "nova" transformação linear S coincide com a T definida anteriormente. Para isso lembre que duas transformações lineares são iguais se, e somente se, elas coincidem em uma base. Portanto é suficiente observar S e T coincidem na base β. Veja que $u = 1\,u + 0\,v$ e pela definição $S(u) = u$. Veja também que $v = 0\,u + 1\,v$ e pela definição $S(v) = \bar{0}$. Portanto,

$$S(u) = u = T(u), \qquad S(v) = v = T(v).$$

1.3 Projeção em um plano π

Estudaremos agora a transformação linear *projeção em um plano* π *de* $\mathbb{R}^3$ *na direção do vetor* v*,* onde o plano contém a origem e o vetor v não é paralelo ao plano.

Esta transformação é definida como segue. Considere o plano de projeção π de equação $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ e o vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ que determina a direção de projeção. A imagem do vetor $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor $\overline{OP}$, onde P é a interseção da reta s de equação paramétrica

$$s\colon (u_1 + tv_1, u_2 + tv_2 + u_3 + tv_3), \quad t \in \mathbb{R},$$

e o plano $\pi\colon a\,x + b\,y + c\,z = 0$ (equação cartesiana). Determinaremos o valor de t que fornece o ponto de interseção,

$$a\,(u_1 + t\,v_1) + b\,(u_2 + t\,v_2) + c\,(u_3 + t\,v_3) = 0,$$

logo,

$$t\,(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3) = -(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3),$$

isto é,

$$t = \frac{-(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3)}{a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3}.$$

Observe que se verifica $a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \neq 0$, isto decorre do fato da direção de projeção não ser paralela ao plano de projeção, ou seja (v_1, v_2, v_3) não é ortogonal ao vetor normal $n = (a, b, c)$ do plano (isto é, $0 \neq (v_1, v_2, v_3) \cdot (a, b, c) = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3$). Logo

$$\begin{aligned} T(u_1, u_2, u_3) = \quad & ((1 - (\tfrac{av_1}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_1 - (\tfrac{bv_1}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_2 - (\tfrac{cv_1}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_3, \\ & , -(\tfrac{av_2}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_1 + (1 - (\tfrac{bv_2}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_2 - (\tfrac{cv_2}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_3, \\ & , -(\tfrac{av_3}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_1 - (\tfrac{bv_3}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_2 + (1 - (\tfrac{cv_3}{av_1+bv_2+cv_3})\, u_3). \end{aligned}$$

Pela discussão acima, T é uma transformação linear.

Como nos casos anteriores esta projeção pode ser obtida como segue. Considere uma base $\beta = \{u_1, u_2, v\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ é uma base do plano π de projeção e v é a direção de projeção. Como a direção v não é paralela a plano temos que β é uma base.

Observe que podemos usar o critério do produto misto para ver que β é uma base:

$$(u_1 \times u_2) \cdot v \neq 0,$$

pois

$$u_1 \times u_2 = n$$

onde n é o vetor normal do plano. Temos que $n \cdot v \neq 0$, pois caso contrário v seria paralelo ao plano.

Dado um vetor w escrevemos w na base β: $w = x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + y\, v$. Então consideramos a transformação definida como

$$S(w) = x\, u_1 + y\, u_2.$$

Deixamos como exercício verificar que S é uma transformação linear. Observamos que esta "nova" transformação linear S coincide com a T definida anteriormente. Como no caso das projeções em uma reta lembramos que duas transformações lineares são iguais se, e somente se, elas coincidem em uma base. Portanto é suficiente observar S e T coincidem na base β. Veja que $u_1 = 1\, u_1 + 0\, u_2 0\, v$ e pela definição $S(u_1) = u_1$. Analogamente temos que $S(u_2) = u_2$. Veja também que $v = 0\, u_1 + 0\, u_2 + 1\, v$ e pela definição $S(v) = \bar{0}$. Portanto,

$$S(u_1) = u_1 = T(u_1), \qquad S(u_2) = u_2 = T(u_2), \qquad S(v) = v = T(v).$$

1.4 Projeção em uma reta em $\mathbb{R}^3$

Estudaremos agora a transformação linear T *projeção uma reta* r *de* $\mathbb{R}^3$ *na direção do vetor* π, onde a reta contém a origem e o plano π não é paralelo à reta e contém a origem.

Esta transformação é definida como segue. Considere o plano de projeção π de equação $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ e o vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ diretor da reta de projeção. A imagem do vetor $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor $\overline{OP}$, onde P é a interseção da reta r e do plano ρ que contém o ponto P e é paralelo ao plano π.

Deixamos como exercício calcular a fórmula explícita desta transformação linear. Veja que esta transformação deixa fixos os vetores paralelos a r e transforma no vetor zero os vetore paralelos ao plano π.

Como nos casos anteriores esta projeção pode ser obtida como segue. Considere uma base $\beta = \{u_1, u_2, v\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ é uma base do plano π que definie a direção de projeção e v é um vetor diretor da reta de projeção. Como a direção v não é paralela a plano temos que β é uma base.

Dado um vetor w escrevemos w na base β: $w = x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + y\,v$. Então temos que

$$T(w) = y\,v.$$

1.5 Espelhamentos em retas e planos

Consideramos um plano π de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e uma base ortogonal $\beta = \{n_1, n_2, v\}$ de $\mathbb{R}^3$ onde $\{n_1, n_2\}$ é uma base do plano π.

Dado um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ o *espelhamento* S de w no plano π é definido com segue. Escrevemos

$$w = x\,n_1 + y\,n_2 + z\,v,$$

e definimos

$$S(w) = x\,n_1 + y\,n_2 - z\,w.$$

Como no caso das projeções temos que S é uma aplicação linear (confira).

Observe que a projeção ortogonal T no plano π do vetor w é

$$T(w) = x\,n_1 + y\,n_2.$$

Portanto, temos se Id é a aplicação linear identidade temos

$$S(w) = 2\,T(w) - \mathrm{Id}(w).$$

Confira os cálculos.

De forma similar podemos definir o *espelhamento* E em uma reta r que contém a origem. Para isso consideramos uma base ortogonal $\{v, v_1, v_2\}$ onde v é o vetor diretor da reta r.

Dado um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ o *espelhamento* E de w no plano π é definido com segue:

$$w = x\,v + y\,v_1 + z\,v_2$$

e definimos

$$S(w) = x\,v - y\,v_1 - z\,v_2.$$

Como no caso das projeções temos que S é uma aplicação linear (confira).

Observe que a projeção ortogonal P na reta r do vetor w é

$$P(w) = x\,v.$$

Como no caso dos espelhamentos em planos temos

$$E(w) = 2\,P(w) - \mathrm{Id}(w).$$

Confira os cálculos.

1.6 Um caso mais geral

As projeções e espelhamentos em retas e planos estudados acima são exemplos particulares do seguinte tipo de transformações lineares mais gerais. Dada uma base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ e números reais a_1, a_2, a_3, definimos $T(w)$ como segue. Seja $w = x_1\,v_1 + x_2\,v_2 + x_3\,v_3$, então

$$T(w) = a_1\,x_1\,v_1 + a_2\,x_2\,v_2 + a_3\,x_3\,v_3.$$

Vejamos que T é linear. Veremos apenas que $T(w + w') = T(w) + T(w')$ (v. é convidado a verificar que $T(\lambda\,w) = \lambda\,T(w)$). Escrevemos

$$w' = x_1'\,v_1 + x_2'\,v_2 + x_3'\,v_3.$$

Portanto

$$T(w') = a_1\,x_1'\,v_1 + a_2\,x_2'\,v_2 + a_3\,x_3'\,v_3.$$

Temos

$$\begin{aligned} T(w) + T(w') &= (a_1\,x_1\,v_1 + a_2\,x_2\,v_2 + a_3\,x_3\,v_3) + (a_1\,x_1'\,v_1 + a_2\,x_2'\,v_2 + a_3\,x_3'\,v_3) \\ &= a_1\,(x_1 + x_1')\,v_1 + a_2\,(x_2 + x_2')\,v_2 + a_3\,(x_3 + x_3)'\,v_3. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$w + w' = (x_1 + x_1')\, v_1 + (x_2 + x_2')\, v_2 + (x_3 + x_3)'\, v_3.$$

e pela definição de T

$$T(w + w') = a_1\, (x_1 + x_1')\, v_1 + a_2\, (x_2 + x_2')\, v_2 + a_3\, (x_3 + x_3)'\, v_3.$$

Portanto $T(w + w') = T(w) + T(w')$.

No caso das projeções em um plano temos $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = 0$ e no caso de projeçẽos em retas $a_1 = 1$ e $a_2 = a_3 = 0$. No caso dos espelhamentos $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = -1$ (em planos) e $a_1 = 1$ e $a_2 = a_3 = -1$ (em retas).