# Álgebra Linear I - Aula 11

1. Transformações lineares.
2. Exemplos de Transformações lineares.

## Roteiro

# 1 Transformações lineares

**Definição 1** (Transformação linear)**.** *Uma transformação linear $T$ definida de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ (pense, por exemplo, em $n$ e $m$ iguais a $2$ ou $3$) é uma aplicação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifica as seguintes propriedades:*

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$*, para todo par de vetores $u$ e $v$ de $\mathbb{R}^n$,*
- $T(\sigma u) = \sigma\, T(u)$ *para todo vetor $u$ de $\mathbb{R}^n$ e todo número real $\sigma$.*

A definição significa que uma transformação linear preserva as operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar. Como consequência da definição de transformação linear temos que

$$T(\bar{0}) = T(\bar{0}+\bar{0}) = T(2\,\bar{0}) = 2\,T(\bar{0}), \quad T(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Observe que $T(\bar{0}) = \bar{0}$ é uma condição necessária para que a transformação $T$ seja linear, mas esta condição não é suficiente. Veja o seguinte exemplo, a transformação $T$

$$T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = x^2,$$

verifica $T(0) = 0$ mas, em geral, $T(x+y) \neq T(x) + T(y)$:

$$T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2x\,y \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y),$$

sempre que $x$ e $y$ sejam os dois simultaneamente não nulos.

Vejamos outros exemplos de transformações que não são lineares:

- $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+2, y+1)$, não é uma transformação linear, pois $T(0,0) = (2,1) \neq (0,0)$.
- $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y)$ verifica $T(0,0) = (0,0)$, porém não é uma transformação linear. Deixamos v. verificar os detalhes, observamos que o fato de $T$ não ser linear segue de que, em geral, $\operatorname{sen}(x+x') \neq \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x')$.

Da definição de transformação linear obtemos as seguintes propriedades (que v. deve verificar como exercício):

**Propriedade 1.1.** *Considere duas transformações de lineares $T$ e $S$,*

$$T,\, S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

*e um número real $\lambda$. Então*

- *A soma das transformações lineares $T+S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida como*

  $$(T+S)(u) = T(u) + S(u),$$

  *é uma transformção linear,*

- *O produto por um número real $\lambda$ de uma transformação linear $T$, definida como $(\lambda T)(u) = \lambda\,(T(u))$, é uma transformação linear.*

**Definição 2** (Conjunto imagem)**.** *A imagem do conjunto $\mathbb{V}$ pela transformação $T$ é o conjunto:*

$$im(T(\mathbb{V})) = \{w \in \mathbb{R}^m \text{ tal que existe } v \in \mathbb{V} \text{ tal que } w = T(v)\}.$$

**Propriedade 1.2.** *Se $\mathbb{V}$ é um subespaço vetorial e $T$ é uma transformação linear, então a imagem $T(\mathbb{V})$ também é um subespaço.*

Em particular, a imagem por uma transformação linear de uma reta ou um plano que contém a origem também é uma reta ou um plano que contém a origem ou o vetor $\bar{0}$.

**Prova:** Para provar que $\mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$ é um subespaço considere vetores $w_1$ e $w_2$ de $\mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$. Temos que provar que $w_1 + w_2 \in \mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$. Da definição de imagem, existem vetores $v_1$ e $v_2 \in \mathbb{V}$ tais que

$$w_1 = T(v_1) \quad \text{e} \quad w_2 = T(w_2).$$

Como $T$ é linear:

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2).$$

Como $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\mathbb{V}$ é um subespaço, $v_1 + v_2 = v_3 \in \mathbb{V}$. Portanto,

$$w_1 + w_2 = T(v_3), \qquad v_3 \in \mathbb{V}.$$

Logo, $w_1 + w_2 \in \mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$.

Deixamos como exercício verificar que se $w \in \mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$ e $\lambda$ é um número real então $\lambda\, w \in \mathrm{im}(T(\mathbb{V}))$. Veja que se $w = T(v)$, $v \in \mathbb{V}$, então $\lambda\, w = T(\lambda\, v)$ onde $\lambda\, v \in \mathbb{V}$, (complete os detalhes). $\square$

Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Veremos que a imagem de uma reta $r$ que contém a origem é ou outra reta que contém a origem ou o vetor nulo. A princípio, como a imagem da reta deve ser um subespaço de $\mathbb{R}^3$, a imagem da reta poderia ser um plano que contém a origem ou todo $\mathbb{R}^3$. Seja $v$ o vetor diretor da reta, então: $r\colon \{t\, v,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Seja $w = T(v)$. Afirmamos que $T(r)$ é a reta $r'$ que contém a origem cujo vetor diretor é $w$, isto é,

$$r'\colon \{t\, w,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que se $w = \bar{0}$, então $T(r) = \bar{0}$ (deixamos v. conferir esta afirmação). Vejamos as duas inclusões:

$T(r) \subset r'$: seja $u \in T(r)$, então $u = T(t\, v)$ para certo $t$. Como $T$ é linear, $u = t\, T(v) = t\, w$. Portanto, $u \in r'$.

$r' \subset T(r)$: seja $u \in r'$, então $u = t\, w = t\, T(v)$, para certo $t$. Como $T$ é linear, $u = T(t\, v) = T(\ell)$, onde (por definicção) $\ell \in r$. Portanto, $u \in T(r)$.

De forma análoga temos que a imagem por uma transformação linear de um plano $\pi$ que contém a origem é ou um plano ou uma reta contendo a origem ou o vetor nulo. Suponha que o plano $\pi$ é gerado pelos vetores $v$ e $w$. As equações paramétricas de $\pi$ são,

$$\pi\colon u = t\, v + s\, w, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Sejam $T(v) = v'$ e $T(w) = w'$. Temos as seguintes possibilidades para a imagem $T(\pi)$:

- um plano $\rho$: se os vetores $v'$ e $w'$ não são paralelos e são não nulos. De fato, o plano $\rho$ é o plano que contém a origem e é paralelo aos vetores $v'$ e $w'$.

- uma reta $r$: se os vetores $v'$ e $w'$ são paralelos e um deles não é nulo (por exemplo, $v' \neq \bar{0}$). De fato, $r$ é a reta que contém a origem e é paralela a $v'$.

- o vetor $\bar{0}$: se $v'$ e $w'$ são nulos.

Vejamos, por exemplo, que se $v' = T(v) \neq \bar{0}$ e $w' = T(w) \neq \bar{0}$ não são paralelos, se verifica que o plano $\rho$ paralelo a $v'$ e $w'$ que contém a origem contém $T(\pi)$ (as outras inclusões e os outros casos seguem exatamente como no exemplo acima e serão omitidos). Seja $\ell' \in T(\pi)$, então, por definição, existe um vetor $\ell \in \pi$ tal que $T(\ell) = \ell'$. Como $\ell \in \pi$, $\ell = t\,v + s\,w$. Como $T$ é linear,

$$\ell' = T(\ell) = T(t\,v + s\,w) = t\,T(v) + s\,T(w) = t\,v' + s\,w'.$$

Assim, pela definição de $\rho$, $\ell \in \rho$.

# 2 Exemplos de Transformações lineares

A seguir veremos alguns exemplos de transformações lineares (v. deve completar os detalhes).

1. A transformação linear *nula,* definida por $T(u) = \bar{0}$ para todo vetor $u$.

2. A transformação linear *identidade,* $T(u) = u$ para todo vetor $u$.

3. Transformações de *escala,* $T(u) = \sigma\,u$ para todo vetor $u$, onde $\sigma \in \mathbb{R}$. Se $|\sigma| < 1$ dizemos que é uma *contração* e se $|\sigma| > 1$ é uma *dilatação.*

4. Transformações $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de *cisalhamento vertical* e

   $$V(x, y) = (x, \alpha\,x + y)$$

   e $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de *cisalhamento horizontal*

   $$H(x, y) = (x + \alpha\,y, y).$$

   Veja a Figura 1.

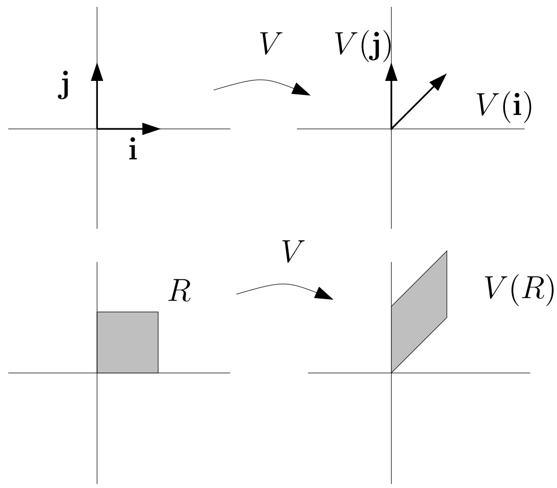


Figura 1: Cisalhamento vertical

5. *Projeção ortogonal em um vetor* $u$ definida por

$$P(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}\, u.$$

   Veja a Figura 2.

   Escreveremos $P(x, y, z)$ em coordenadas. Podemos supor, sem perda de generalidade que o vetor $u = (a, b, c)$ é unitário. Em coordenadas temos,

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= ((x,y,z)\cdot(a,b,c))\,(a,b,c) = (a\,x + b\,y + c\,z)\,(a,b,c) = \\ &= (a^2\,x + a\,b\,y + a\,c\,z, a\,b\,x + b^2\,y + b\,c\,z, a\,c\,x + b\,c\,y + c^2\,z). \end{aligned}$$

6. *Reflexões em torno dos eixos coordenados* $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, definidas como

$$R(x, y) = (x, -y), \quad S(x, y) = (-x, y),$$

   respectivamente. Veja a Figura 3.

7. *Reflexão na origem,*

$$T(x, y) = (-x, -y).$$

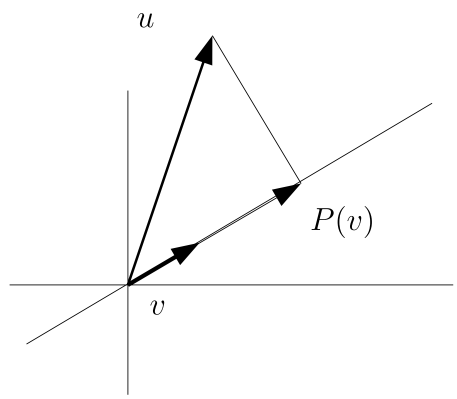


Figura 2: Projeção ortogonal

8. Dado um vetor $u$ de $\mathbb{R}^3$, definimos a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $T(v) = v \cdot u$ (*produto escalar*). O fato de $T$ ser linear segue das propriedades do produto escalar.

9. Dado um vetor $u$ de $\mathbb{R}^3$, definimos a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $T(v) = v \times u$ (*produto vetorial*). O fato de $T$ ser linear segue das propriedades do produto vetorial.

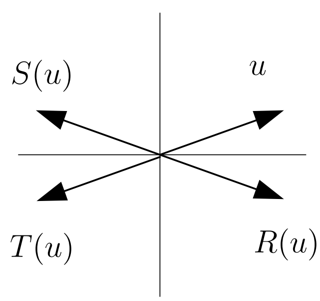


Figura 3: Reflexões

Deixamos, como exercício, verificar que as transformações anteriores são lineares.

Observe que todas as transformações lineares exibidas até agora são da forma

$$T(x, y) = (a\,x + b\,y, c\,x + d\,y),$$

no caso de transformações do plano no plano, e da forma

$$T(x,y,z) = (a\,x + b\,y + c\,z, d\,x + e\,y + f\,z, g\,x + h\,y + k\,z),$$

no caso de transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times w,$$

para certo vetor $w$ tem a seguinte forma. Suponha que $w = (a,b,c)$, então

$$T(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (c\,y - b\,z, a\,z - b\,x, b\,x - a\,y).$$

Finalmente, no caso da transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(v) = v \cdot u,$$

se o vetor $u = (a,b,c)$ temos

$$T(x,y,z) = a\,x + b\,y + c\,z.$$

Temos também que as seguintes transformações são lineares:

$$\begin{array}{ll} T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & T(x,y) = a\,x + b\,y, \\ T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, & T(x,y,z) = a\,x + b\,y + c\,z, \\ T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & T(x,y,z) = (a\,x + b\,y + c\,z, d\,x + e\,y + f\,z) \\ T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & T(x,y) = (a\,x + b\,y, c\,x + d\,y, e\,x + f\,y), \end{array}$$

onde $a, b, c, d, e, f$ são números reais.

De fato, temos o seguinte, *toda transformação linear tem a forma das transformações acima.*