G4 de Álgebra Linear I – 2012.2

Gabarito

7 de Dezembro de 2012

---

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(\vec{v}) = \big(\vec{v} \times (1, -1, 2)\big) \times (0, 1, 1).$$

a) Determine a matriz $[T]_\varepsilon$ da transformação linear T na base canônica.

b) Determine a equação cartesiana da imagem de T. Lembre que:

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

c) Considere a base

$$\gamma = \{(1, 1, 1), (1, -1, 2), (9, 0, 0)\}.$$

Determine a matriz $[T]_\gamma$ da transformação linear T na base γ.

d) Considere o plano de equação cartesiana

$$\rho\colon x = 0.$$

Determine uma base da imagem $T(\rho)$ de ρ pela transformação T.

Resposta:

a) Calculamos as imagens dos vetores da base canônica:

$$T(\vec{i}) = \big((1, 0, 0) \times \big(1, -1, 2)\big) \times (0, 1, 1) = (0, -2, -1) \times (0, 1, 1) = (-1, 0, 0),$$
$$T(\vec{j}) = \big((0, 1, 0) \times \big(1, -1, 2)\big) \times (0, 1, 1) = (2, 0, -1) \times (0, 1, 1) = (1, -2, 2),$$
$$T(\vec{k}) = \big((0, 0, 1) \times \big((1, -1, 2)\big) \times (0, 1, 1) = (1, 1, 0) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1).$$

Portanto:

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) A imagem de T é gerada pelas imagens dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, isto é, pelos vetores

$$T(\vec{i}) = (-1, 0, 0), \quad T(\vec{j}) = (1, -2, 2), \quad T(\vec{k}) = (1, -1, 1).$$

Estes vetores não são paralelos, mas pela definição de T sabemos que todos são ortogonais a $(0, 1, 1)$, e portanto estão no plano $y + z = 0$. Como os vetores $T(\vec{i}) = (-1, 0, 0)$ e $T(\vec{j}) = (1, -2, 2)$ não são paralelos, eles geram esse plano. Portanto, imagem de T é o plano

$$y + z = 0.$$

c) Calculamos as imagens dos vetores da base:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevemos esse vetores na base γ:

$$(1, -3, 3) = a\,(1, 1, 1) + b\,(1, -1, 2) + c\,(9, 0, 0),$$

logo

$$(1, -3, 3)_\gamma = (-1, 2, 0),$$

$$(0, 0, 0) = a\,(1, 1, 1) + b\,(1, -1, 2) + c\,(9, 0, 0),$$

logo

$$(0, 0, 0)_\gamma = (0, 0, 0),$$

e

$$(-9, 0, 0) = a\,(1, 1, 1) + b\,(1, -1, 2) + c\,(9, 0, 0).$$

logo

$$(-9,0,0)_\gamma = (0,0,-1).$$

Assim a matriz na base γ é:

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Uma base do plano é formada (por exemplo) pelos vetores $(0,1,1)$ e $(0,1,0)$. Calculamos as imagens desses vetores:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Logo a imagem do plano ρ é um plano, como está contido na imagem de T coincide com a imagem de T. Uma base desta imagem é, por exemplo,

$$\{(2,-3,3),(1,-2,2)\}.$$

---

2) Considere as bases de $\mathbb{R}^2$

$$\alpha = \{(1,1),(-1,0)\} \quad \text{e} \quad \sigma = \{(0,1),(1,-1)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base α é

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine **explicitamente** as matrizes de mudança de base da base σ para a base α e da base α para a base σ.

b) Determine **explicitamente** a matriz $[T]_\sigma$ da transformação linear T na base σ.

c) Escreva, se possível, uma forma diagonal de T.

d) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de a, b e c sabendo que M tem uma base ortonormal de autovetores e que o seu determinante é 0.

Resposta:

a) Temos que a matriz da transformação linear T na base canônica é:

$$[T]_\varepsilon = P\,[T]_\alpha\,P^{-1},$$

onde P é a matriz formada pelos vetores da base α.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com a sua inversa:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também que:

$$[T]_\varepsilon = S\,[T]_\sigma\,S^{-1},$$

onde S é a matriz formada pelos vetores da base σ.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com sua inversa:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$S\,[T]_\sigma\,S^{-1} = P\,[T]_\alpha\,P^{-1}$$

$$[T]_\sigma = S^{-1}\,P\,[T]_\alpha\,P^{-1}\,S$$

Assim, a matriz de mudança de base da base σ para a base α é:

$$P^{-1}\,S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

E a matriz de mudança de base da base α para a base σ é:

$$S^{-1}\,P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

Pelo item anterior temos que:

$$[T]_\sigma = S^{-1}\,P\,[T]_\alpha\,P^{-1}\,S.$$

Então:

$$[T]_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c)

As matrizes $[T]_\sigma$, $[T]_\varepsilon$ e $[T]_\alpha$ são semelhantes. Logo podemos achar os autovalores de $[T]_\sigma$.

Usando o traço e o determinante de $[T]_\sigma$ achamos o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda - 2$$

As raízes de $p(\lambda)$ são os autovalores. Assim fazendo $p(\lambda) = 0$, temos:

$$\lambda_1 = (3+\sqrt{17})/2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = (3-\sqrt{17})/2.$$

Autovalores reais e distintos garantem que a transformação é diagonalizável. E uma forma diagonalde T pode ser:

$$D = \begin{pmatrix} (3+\sqrt{17})/2 & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{17})/2 \end{pmatrix}.$$

3) Considere o plano π em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem de equação cartesiana

$$\pi\colon 2\,x - y - 2\,z = 0.$$

Considere a transformação linear $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento em relação ao plano π.

a) Encontre uma base *ortonormal* β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de E, e determine os respectivos autovalores.

b) Determine a matriz $[E]_\beta$ da transformação linear E na base β.

c) Determine a matriz $[E]_\varepsilon$ da transformação linear E na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

d) Determine **explicitamente** as matrizes

$$[E]_\varepsilon^{1000} - [E]_\varepsilon^{1002} \qquad \text{e} \qquad [E]_\varepsilon^{1000} - [E]_\varepsilon^{1001}.$$

Resposta:

a) O espelhamento é definido : $T(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a π e $T(\bar{w}) = -\bar{w}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a π. Portanto, -1 é um autovalor é um autovetor associado -1 é $(2,-1,-2)$ (que é o vetor perpendicular ao plano π). Também temos que 1 é um autovalor (multiplicidade álgebrica 2) e os vetores do plano π não nulos são seus autovetores. Assim, $(1,0,1)$ é um autovetor

$$\bar{u} = (2,-1,-2) \times (1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,4,-1).$$

é outro autovetor associado a 1.

Uma base ortonormal β formada por autovetores de T é

$$\beta = \left\{ \Big(2/3, -1/3, -2/3\Big), \Big(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\Big), \Big(1/\sqrt{18}, 4/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18}\Big) \right\}.$$

b) A matriz $[E]_\beta$ é uma matriz diagonal (pois a base β é formada por autovetores) e sua diagonal principal é pelos autovalores correspondentes (respeitando a ordem). Logo:

$$[E]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Temos que:

$$[E]_\varepsilon = S\,[E]_\beta\,S^{-1},$$

onde S é a matriz ortogonal formada pelos vetores da base β do item anterior. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ -1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 4/9 & 7/9 & -4/9 \\ 8/9 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

d) Lembre que (pelo item anterior)

$$[E]_\varepsilon = [S][D][S^{-1}], \quad [D] = [E]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$[E]_\varepsilon^{1000} = [S][D^{1000}][S^{-1}] = Id,$$

pois

$$[D^2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que quando n é par então $[D^n]$ será matriz identidade. Agora para n ímpar teremos que $[D^n] = D$. Logo:

$$[E]_\varepsilon^{1000} - [E]_\varepsilon^{1002} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que:

$$[E]_\varepsilon^{1000} - [E]_\varepsilon^{1001} = [Id] - [E]_\varepsilon, = \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & -8/9 \\ -4/9 & 2/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & 8/9 \end{pmatrix}.$$