P3 de Álgebra Linear I – 2005.1

Respostas Prova tipo B

---

1) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi\colon x + y = 0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor:

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

a) $\boxed{a = 0}$

b) $\boxed{b = \text{qualquer}}$

c) $\boxed{c \neq 0 \quad d = 0}$

---

2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o polinômio característico p_T de T.

b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,-1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}.$$

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

e) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

a) $\boxed{\text{pol. característico } p_T\text{:} \quad (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.}$

b)

autovalores: 1 (simples) e 3 (multiplicidade 2)

autovetores: $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$, e $(0, s, 0)$, $s \neq 0$.

c)

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\text{primeira coluna de } [T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)

$\gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1/2, t, 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$

---

3)

a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P. Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção

v de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ, onde

$$\pi\colon x + y - 2\,z = 0, \qquad \rho\colon x + y + z = 0.$$

Encontre uma matriz R tal que a matriz de T na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^t.$$

Respostas:

a)

plano $\pi\colon x - z = 0$, direção $v = (2, -1, -1)$

b)

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

---

4) Considere a matriz

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A e que (-1) é um autovalor de A.

a) Determine uma forma diagonal D da matriz A.

b) Determine uma base ortonormal β de autovetores de A tal que a matriz de A na base β seja a matriz D obtida no item anterior.

Respostas:

a)

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b)

$$\boxed{\beta = \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) \right\}.}$$