

P3 de Álgebra Linear I – 2005.1

Respostas Prova tipo A

1) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi: y + z = 0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor:

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & c & c \\ 0 & 2 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

a)

$$a \in \mathbb{R}, (a \text{ qualquer})$$

b)

$$b = 0$$

c)

$$c \neq 0 \quad d = 0$$

2) Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o polinômio característico p_T de T .

b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de \mathbb{R}^3

$$\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β .

d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_{\beta}$ de T na base β .

e) Encontre uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que a matriz $[T]_{\gamma}$ de T na base γ seja

$$[T]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

a)

$$\text{pol. característico } p_T: \quad (2 - \lambda)(3 + \lambda)^2 = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 18.$$

b)

autovalores: 2 (simples) e -3 (multiplicidade 2)

autovetores: $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$, e $(0, s, 0)$, $s \neq 0$.

c)

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d)

primeira coluna de $[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e)

$$\gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1/5, t, 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3)

a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P . Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção

v de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \quad \text{onde} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ , onde

$$\pi: x - y + 2z = 0, \quad \rho: x - y - z = 0.$$

Encontre uma matriz R tal que a matriz de T na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^t.$$

Respostas:

a)

plano π : $-y + z = 0$, direção $v = (-1, 2, -1)$

b)

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Considere a matriz

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabendo que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A e que 2 é um autovalor de A .

- Determine uma forma diagonal D da matriz A .
- Determine uma base ortonormal β de autovetores de A tal que a matriz de A na base β seja a matriz D obtida no item anterior.

Respostas:

a)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$