

## Prova tipo B

### P3 de Álgebra Linear I – 2005.1

Data: 6 de junho 2005

Horário: 17:10 – 19:00

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	0.5		
1b	0.5		
1c	1.0		
2a	0.5		
2b	1.0		
2c	1.0		
2d	1.0		
2e	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	0.5		
4b	1.0		
Total	10.0		

### Instruções

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova e as folhas de rascunho. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.
- Entregar somente este caderno com as respostas. Faça os cálculos nas folhas de rascunho.
- **Verifique, revise e confira** cuidadosamente suas respostas. Escreva de forma clara e legível.

1) Determine para que valores de  $a$  e  $b$  as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Determine  $c$  e  $d$  para que os vetores não nulos do plano  $\pi: x + y = 0$  sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor  $(17, 21, 356)$  não seja um autovetor:

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**Respostas:**

a)

$a =$
-------

b)

$b =$
-------

c)

$c =$	$d =$
-------	-------

2) Considere a transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine o polinômio característico  $p_T$  de  $T$ .
- b) Determine os autovalores de  $T$  e os autovetores correspondentes.

Considere a base  $\beta$  de  $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

- c) Determine explicitamente a matriz  $P$  de mudança de base da base canônica à base  $\beta$ .
- d) Determine a primeira coluna da matriz  $[T]_{\beta}$  de  $T$  na base  $\beta$ .
- e) Encontre uma base  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que a matriz  $[T]_{\gamma}$  de  $T$  na base  $\gamma$  seja

$$[T]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**Respostas:**

a)

b)

c)

$$P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

d)

$$\text{primeira coluna de } [T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

e)

$$\gamma = \{ \quad \}$$

3)

- a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção  $P$ . Determine a equação cartesiana do plano  $\pi$  de projeção e a direção  $v$  de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \quad \text{onde} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Considere a transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtida como a composição da projeção ortogonal no plano  $\pi$  e o espelhamento no plano  $\rho$ , onde

$$\pi: x + y - 2z = 0, \quad \rho: x + y + z = 0.$$

Encontre uma matriz  $R$  tal que a matriz de  $T$  na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^t.$$

---

Respostas:

a)

plano  $\pi$ :

direção  $v$ :

b)

$$R = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

4) Considere a matriz

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que  $(1, 0, 1)$  é um autovetor de  $A$  e que  $(-1)$  é um autovalor de  $A$ .

- Determine uma forma diagonal  $D$  da matriz  $A$ .
- Determine uma base ortonormal  $\beta$  de autovetores de  $A$  tal que a matriz de  $A$  na base  $\beta$  seja a matriz  $D$  obtida no item anterior.

---

**Respostas:**

a)

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b)

$$\beta = \{ \quad \quad \quad \}$$