P1 de Álgebra Linear I – 2005.2

8 de setembro de 2005.

---

1)

(a) Considere os planos de equações cartesianas

$$\begin{aligned}
&\alpha\colon x - 2\,y + z = 1,\\
&\beta\colon 2\,x - y + 2\,z = 2,\\
&\gamma\colon x - 5\,y + z = k.
\end{aligned}$$

Determine k para que os planos se interceptem ao longo de uma reta.

(b) Considere os planos π e ρ de equações cartesianas

$$\pi\colon 2\,x - y + z = 1, \quad \rho\colon x + 2\,y + z = 2.$$

Determine a equação cartesiana do plano τ que contém o ponto $(1, 1, 1)$ tal que a interseção dos planos π, ρ e τ seja uma reta r.

(c) Considere os planos π e ρ do item anterior. Estude se existe um plano ν tal que a interseção dos planos π, ρ e ν seja o ponto $(1, 1, 0)$. Em caso afirmativo determine a equação cartesiana de ν. Em caso negativo, justifique cuidadosamente sua resposta.

---

2) Considere as retas de equações paramétricas

$$r_1\colon (t, t+1, 2t-1), t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad r_2\colon (2t+1, t, t), t \in \mathbb{R}.$$

(a) Verifique se as retas se interceptam. Em caso afirmativo determine o ponto de interseção, e em caso negativo a distância entre as duas retas.

(b) Escreva a equação cartesiana do plano π que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1.

(c) Determine a distância do plano π do item anterior ao ponto $P = (-1, 3, 0)$.

(d) Considere os pontos

$$A = (0, 1, -1) \quad \text{e} \quad B = (1, 0, 0).$$

Determine um ponto C pertencente à reta r_2 que seja equidistante dos pontos A e B.

(e) Considere agora os planos

$$\alpha\colon x - y + z = 0, \quad \text{e} \quad \beta\colon 2x + y - 4z = 0.$$

Encontre o plano ν perpendicular a α e β e que passa pelo ponto $(4, 0, -2)$.

---

3) Considere os pontos de $\mathbb{R}^3$

$$P = (1, -2, 3), \quad Q = (4, 3, -1), \quad R = (2, 2, 1), \quad S = (5, 7, -3).$$

(a) Mostre que o quadrilátero Σ tendo como vértices os ponts P, Q, R e S é um paralelogramo.

(b) Determine a área do paralelogramo Σ.

(c) Determine a equação cartesiana do plano π que contém o paralelogramo Σ.