P4 de Álgebra Linear I – 2003.2

Gabarito Prova Modelo

1) (Prova tipo B) Considere o ponto $P = (0, 1, 2)$, a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (1 + t, 1 + 2t, 2 - 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva r como interseção de dois planos (equação cartesiana) ρ e α, ρ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e α paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$.

b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contém a reta r e o ponto P.

c) Encontre, caso exista, o ponto R de interseção da reta r acima e da reta

$$r'\colon (t, -1 + 2t, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva *as retas são reversas.*

d) Calcule a distância d entre o ponto P e a reta r.

Resposta:

(a) O plano ρ é paralelo aos vetores $(1, 2, -3)$ (o vetor diretor da reta r) e $(1, 0, 0)$. Portanto, seu vetor normal é

$$(1, 2, -3) \times (1, 0, 0) = (0, -3, -2).$$

Portanto, a equação cartesiana de ρ é da forma $3y + 2z = d$. Como o ponto $Q = (1, 1, 2)$ da reta necessariamente pertence ao plano ρ, temos $d = 7$, logo

$$\rho\colon 3y + 2z = 7.$$

Analogamente, α é paralelo aos vetores $(1, 2, -3)$ (o vetor diretor da reta r) e $(0, 1, 0)$. Portanto, seu vetor normal é

$$(1, 2, -3) \times (0, 1, 0) = (3, 0, 1).$$

Portanto, a equação cartesiana de α é da forma $3x + z = d$. Como o ponto $Q = (1, 1, 2)$ da reta necessariamente pertence ao plano α, temos $d = 5$, logo

$$\alpha\colon 3x + z = 5.$$

(b) Dois vetores paralelos ao plano τ são o vetor diretor de r, $(1, 2, -3)$, e o vetor determinado pelos pontos $P = (0, 1, 2)$ e $Q = (1, 1, 2)$, logo

$$\overline{PQ} = (1, 0, 0).$$

Portanto, o vetor normal do plano τ é

$$(1, 2, -3) \times (1, 0, 0) = (0, -3, -2).$$

Logo $\tau = 3y + 2z = d$, como $(0, 1, 2) \in \tau$, $d = 7$.

(c) Para determinar a interseção das retas r e r' devemos resolver o sistema:

$$\begin{array}{rcl} 1 + t & = & s, \\ 1 + 2t & = & -1 + 2s, \\ 2 - 3t & = & 1 - s. \end{array}$$

Substituindo o valor de $s = (1 + t)$ na segunda e terceira equações,

$$1 + 2t = -1 + 2 + 2t, \quad 2 - 3t = t.$$

Logo

$$1 = 1, \quad t = 1.$$

Logo o ponto de interseção é obtido para $t = 1$ (na reta r) ou $s = 2$ (na reta r'). Obtemos, $R = (2, 3, -1)$.

(d) Para calcular a distância de P a r escolhemos qualquer ponto de r (por exemplo o ponto $Q = (1, 1, 2)$) e consideramos o vetor diretor de r e o vetor $\overline{PQ} = (1, 0, 0)$, temos que

$$d = \frac{|(1, 2, -3) \times (1, 0, 0)|}{|(1, 2, -3)|} = \frac{|(0, 3, 2)|}{|(1, 2, -3)|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}.$$

2) (Prova tipo C) Considere a base

$$\beta = \{u_1 = (0,1,1); u_2 = (1,1,1); u_3 = (1,1,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear T,

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

definida como segue: dado um vetor w da forma

$$w = a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3$$

temos

$$T(w) = (a + 2b + 3c)\,u_3.$$

a) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica.

c) Determine (explicitamente) a matriz $[M]$ de mudança de base da base β à base canônica.

d) Considere agora o plano $\pi\colon 2x - y - z = 0$ e a base ξ do plano π

$$\xi = \{(2,1,1); (0,1,1)\}.$$

Determine as coordenadas $(w)_\xi$ do vetor $w = (4,4,4)$ na base ξ.

Resposta:

(a) Observe que

$$\begin{array}{ll} T(u_1) & = u_3, \quad (T(u_1))_\beta = (0,0,1); \\ T(u_2) & = 2u_3, \quad (T(u_2))_\beta = (0,0,2); \\ T(u_3) & = 3u_3, \quad (T(u_3))_\beta = (0,0,3). \end{array}$$

Portanto, a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Veja que $(1,0,0) = u_2 - u_1$, portanto,

$$T(1,0,0) = T(u_2) - T(u_1) = u_3 = (1,1,0).$$

Veja que $(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0)$, portanto,

$$T(0,1,0) = T(1,1,0) - T(1,0,0) = (3,3,0) - (1,1,0) = (2,2,0).$$

Finalmente, veja que $(0,0,1) = u_2 - u_3$, portanto,

$$T(0,0,1) = T(u_2) - T(u_3) = -u_3 = (-1,-1,0).$$

Portanto,

$$[T]_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A matriz $[M]$ tem por colunas os vetores de base β, isto é,

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) As coordenadas do vetor $w = (4,4,4)$ na base ξ são (a,b), onde

$$(4,4,4) = a(2,1,1) + b(0,1,1).$$

Para determinar a e b chegamos ao sistema:

$$4 = 2a + 0b, \quad 4 = a + b, \quad 4 = a + b.$$

A solução é $a = b = 2$, logo $(w)_\xi = (2,2)$.

3) Considere a projeção P no plano π

$$\pi\colon x - 2y + 2z = 0$$

na direção do vetor v

$$v = (1, 0, 1).$$

a) Determine a matriz $[P]$ da projeção P na base canônica.

b) Encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[P]_\beta$ na base β seja

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta:

a) É suficiente conhecer as imagens de três vetores de uma base. Temos

$$P(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

e escolhendo dois vetores do plano

$$P(2, 0, -1) = (2, 0, -1), \quad P(0, 1, 1) = (0, 1, 1).$$

Como

$$P(3, 0, 0) = P(2, 0, -1) - P(1, 0, 1) = (2, 0, -1),$$

temos

$$P(1, 0, 0) = (2/3, 0, -1/3).$$

Usando

$$P(1, 0, 1) = P(1, 0, 0) + P(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

temos

$$P(0, 0, 1) = -P(1, 0, 0) = (-2/3, 0, 1/3).$$

Finalmente

$$P(0, 1, 1) = P(0, 1, 0) + P(0, 0, 1) = (0, 1, 1),$$

portanto

$$P(0, 1, 0) = (0, 1, 1) - (-2/3, 0, 1/3) = (2/3, 1, 2/3).$$

Logo,

$$[P] = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

b) Temos que os

- $(2,1,0)$ é um autovetor associado a 1,
- $(1,0,1)$ é um autovetor associado a 0, e
- $(2,0,-1)$ é um autovetor associado a 1.

Portanto, é suficiente escolher a base

$$\beta = \{(2,1,0);(1,0,1);(2,0,-1)\}.$$

4) (Prova tipo A) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz M **não seja diagonalizável**.

Resposta: Observe que se $b \neq 1, 2$ os autovalores de M são $2, 1, b$ (como a matriz é triangular os autovalores são os elementos da diagonal), logo são todos diferentes e a matriz é diagonalizável. Portanto, *a priori* a única possibilidade para M não ser diagonalizável é que algúm autovalor seja duplo, ou seja $b = 1$ ou $b = 2$. Neste caso é necessário estudar os autovetores.

Se $b = 1$, $\lambda = 1$ é um autovalor duplo. Os autovetores de 1 verificam:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & a & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x - ay = 0.$$

Independentemente do valor de a, existem dois autovetors linearmente independentes associados ao autovalor 1 (por exemplo $(0, 0, 1)$ e $(a, 1, 0)$). Juntando o autovetor associado a 2 (o vetor $(1, 0, 0)$) obtemos uma base de autovetores de M. Logo se $b = 1$ a matriz é diagonalizável.

Se $b = 2$, $\lambda = 2$ é um autovalor de multiplicidade dois. Os autovetores associados a 2 verificam:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & a & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ay = 0, \quad y = 0.$$

Independentemente do valor de a, existem dois autovetors linearmente independentes associados ao autovalor 2 (por exemplo $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$). Juntando o autovetor associado a 1 (o vetor $(-a, 1, 0)$) obtemos uma base de autovetores de M. Logo se $b = 2$ a matriz é diagonalizável.

Portanto, independentemente dos valores de a e b, a matriz M é sempre diagonalizável.

5) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica é simétrica. Sabendo que

- $T(1,2,1) = (2,4,2)$,
- todo vetor não nulo do plano $x + 2y + z = 0$ é um autovetor,
- o determinante de $[T]_\epsilon$ é 50, e
- o traço de $[T]_\epsilon$ é negativo.

Determine os autovalores de T com suas multiplicidades.

Resposta: Como todos os vetores não nulos do plano são autovetores, todos os vetores do plano estão associados ao mesmo autovalor σ que deve ter multiplicidade pelo menos igual a 2.

De $T(1,2,1) = (2,4,2)$, temos que 2 é um autovalor.

Como o determinante é 50, temos

$$50 = 2\,\sigma^2.$$

Logo $\sigma^2 = 25$, $\sigma = \pm 5$. Mas se $\sigma = 5$ o traço de T é positivo (igual a 12). Logo $\sigma = -5$. Portanto, os autovalores são 2 (simples) e -5 (de multiplicidade dois).

6) (todos os tipos) Considere a transformação linear T cuja matriz $[T]$ na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Resposta: Escreva

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

e veja que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como P é ortogonal, $P^{-1} = P^t$, a matriz dada verifica

$$[T] = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Considere a base

$$\beta = \{u = (1,1,0); v = (1,-1,-2); w = (1,-1,1)\},$$

e observe que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

representam um espelhamento no plano de vetor normal v (portanto, na base canônica, o espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$) e a projeção ortogonal no plano de vetor normal u (que na base canônica é $x + y = 0$). Logo obtemos que $[T]$ representa:

- a projeção ortogonal no plano $x+y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.