**Prova tipo D**

# P4 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 1 de dezembro de 2003.

Horário: 17:05 – 18:55.

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:______________________________ Turma:__________

| Questão | Valor | Nota | Revis. |
|---|---|---|---|
| 1a | 0.5 | | |
| 1b | 0.5 | | |
| 1c | 0.5 | | |
| 1d | 0.5 | | |
| 2a | 1.0 | | |
| 2b | 1.0 | | |
| 2c | 0.5 | | |
| 2d | 0.5 | | |
| 3a | 1.0 | | |
| 3b | 1.0 | | |
| 4 | 1.0 | | |
| 5 | 1.0 | | |
| 6 | 1.0 | | |
| Total | 10.0 | | |

## Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado. Escreva de forma clara e legível.**
- **É proibido desgrampear a prova e as folhas de rascunho. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **V. somente deverá entregar este caderno com as respostas. Faça os cálculos nas folhas de rascunho.**

**Revisão:** Terça-feira, (2-12-03), sala e horário de aula

**1)** Considere o ponto $P = (2, 1, 0)$, a reta $r$ de equação paramétrica

$$r\colon (3 - 2t, 5 + t, 2 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**a)** Escreva $r$ como intereseção de dois planos (equação cartesiana) $\rho$ e $\alpha$, $\rho$ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e $\alpha$ paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$.

**b)** Determine a equação cartesiana do plano $\tau$ que contém a reta $r$ e o ponto $P$.

**c)** Encontre, caso exista, o ponto $R$ de interseção da reta $r$ acima e da reta

$$r'\colon (1 + 2t, 2 + t, 2 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva *as retas são reversas.*

**d)** Calcule a distância $d$ entre o ponto $P$ e a reta $r$.

---

**Respostas:**

**a)** $\rho$: $\alpha$:

**b)** $\tau$:

**c)** $R =$

**d)** $d =$

**2)** Considere a base

$$\beta = \{u_1 = (1,0,1); u_2 = (1,1,0); u_3 = (1,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T$,

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

definida como segue: dado um vetor $w$ da forma

$$w = a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3$$

temos

$$T(w) = (3a + b + 2c)\,u_2.$$

**a)** Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\beta$ de $T$ na base $\beta$.

**b)** Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\epsilon$ de $T$ na base canônica.

**c)** Determine (explicitamente) as matriz $[M]$ de mudança de base da base $\beta$ à base canônica..

**d)** Considere agora o plano $\pi\colon x + y + z = 0$ e a base $\xi$ do plano $\pi$

$$\xi = \{(1,-2,1); (2,-1,-1)\}.$$

Determine as coordenadas $(w)_\xi$ do vetor $w = (7,-8,1)$ na base $\xi$.

---

**Respostas:**

**2.a)** $$[T]_\beta = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

**2.b)**

$$[T]_\epsilon = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

**2.c)**

$$[M] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

**2.d)**

$(w)_\xi =$

**3)** Considere a projeção $P$ no plano $\pi$

$$\pi\colon x - 2y + 2z = 0$$

na direção do vetor $v$

$$v = (1, 0, 1).$$

**a)** Determine a matriz $[P]$ da projeção $P$ na base canônica.

**b)** Encontre uma base $\beta$ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[P]_\beta$ na base $\beta$ seja

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

**Respostas:**

**3.a)** $[P] = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

**3.b)** $\beta = \{ \qquad \qquad \}$

**4)** Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz $M$ **não seja diagonalizável**.

**Marque com caneta no quadro abaixo sua resposta**

**Atenção:** Use "não sei" caso você não saiba a resposta. Resposta errada vale $-0.2$ pontos.

| | |
|---|---|
| $b = 3$ e $a = 1$ | |
| $b = 1$ e $a = 1$ | |
| $b = 3$ e $a = 2$ | |
| $b = 0$ e $a$ qualquer número real | |
| nenhuma, $M$ é sempre diagonalizável | |
| todas as afirmações anteriores são falsas | |
| não sei | |

**5)** Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_\epsilon$ de $T$ na base canônica é simétrica. Sabendo que

- $T(1,0,1) = (2,0,2)$,
- todo vetor não nulo do plano $x + z = 0$ é um autovetor,
- o determinante de $[T]_\epsilon$ é 32, e
- o traço de $[T]_\epsilon$ é negativo.

Determine os autovalores de $T$ com suas multiplicidades.

---

**Resposta:**

| |
|---|
| **autovalores:** |

**6)** Considere a transformação linear $T$ cuja matriz $[T]$ na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é a verdadeira.

---

A transformação linear $T$ é:

**(a)** A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

**(b)** A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

**(c)** A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$ seguido de de espelhamento no plano $x + z = 0$.

**(d)** A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$ seguido de de espelhamento no mesmo plano $x - y + z = 0$.

**(e)** A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

**(f)** A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

**(g)** A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no mesmo plano $x + y = 0$.

**(h)** A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$ seguida do espelhamento no mesmo plano $x - y - 2z = 0$.

**(i)** A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$ seguido de de espelhamento no plano $x + y = 0$.

**(j)** A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$ seguido de de espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

**(k)** O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

**(l)** A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$.

**(m)** O espelhamento no plano $x + y = 0$.

**(n)** Nenhuma das opções acima é verdadeira.

---

**Resposta:**

**Marque com caneta no quadro abaixo sua resposta**

**Atenção:** use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta.

| **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** | **k** | **l** | **m** | **n** | **N** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | |