

## Prova tipo B

### P4 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 1 de dezembro de 2003.

Horário: 17:05 – 18:55.

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	0.5		
1b	0.5		
1c	0.5		
1d	0.5		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	0.5		
2d	0.5		
3a	1.0		
3b	1.0		
4	1.0		
5	1.0		
6	1.0		
Total	10.0		

### Instruções:

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado. Escreva de forma clara e legível.
- É proibido desgrampear a prova e as folhas de rascunho. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.
- V. somente deverá entregar este caderno com as respostas. Faça os cálculos nas folhas de rascunho.

**Revisão:** Terça-feira, (2-12-03), sala e horário de aula

1) Considere o ponto  $P = (0, 1, 2)$ , a reta  $r$  de equação paramétrica

$$r: (1 + t, 1 + 2t, 2 - 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva  $r$  como interseção de dois planos (equação cartesiana)  $\rho$  e  $\alpha$ ,  $\rho$  paralelo ao eixo  $\mathbb{X}$  e  $\alpha$  paralelo ao eixo  $\mathbb{Y}$ .

b) Determine a equação cartesiana do plano  $\tau$  que contém a reta  $r$  e o ponto  $P$ .

c) Encontre, caso exista, o ponto  $R$  de interseção da reta  $r$  acima e da reta

$$r': (t, -1 + 2t, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva *as retas são reversas*.

d) Calcule a distância  $d$  entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ .

---

**Respostas:**

a)

$\rho:$

$\alpha:$

b)

$\tau:$

c)

$R =$

d)

$d =$

2) Considere a base

$$\beta = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (0, 1, 1); u_3 = (1, 1, 0)\}$$

de  $\mathbb{R}^3$  e a transformação linear  $T$ ,

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida como segue: dado um vetor  $w$  da forma

$$w = a u_1 + b u_2 + c u_3$$

temos

$$T(w) = (a + 2b + 3c) u_2.$$

- Determine (explicitamente) a matriz  $[T]_\beta$  de  $T$  na base  $\beta$ .
- Determine (explicitamente) a matriz  $[T]_\epsilon$  de  $T$  na base canônica.
- Determine (explicitamente) a matriz  $[M]$  de mudança de base da base  $\beta$  à base canônica.
- Considere agora o plano  $\pi: x + y + z = 0$  e a base  $\xi$  do plano  $\pi$

$$\xi = \{(1, 2, -3); (2, -1, -1)\}.$$

Determine as coordenadas  $(w)_\xi$  do vetor  $w = (7, 4, -11)$  na base  $\xi$ .

---

**Respostas:**

2.a)

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$



3) Considere a projeção  $P$  no plano  $\pi$

$$\pi: x - y + 2z = 0$$

na direção do vetor  $v$

$$v = (1, 1, -1).$$

a) Determine a matriz  $[P]$  da projeção  $P$  na base canônica.

b) Encontre uma base  $\beta$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que a matriz  $[P]_\beta$  na base  $\beta$  seja

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

Respostas:

3.a)

$$[P] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3.b)

$$\beta = \{ \quad \quad \quad \}$$

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz  $M$  não seja diagonalizável.

Marque com caneta no quadro abaixo sua resposta

**Atenção:** Use “não sei” caso você não saiba a resposta. Resposta errada vale  $-0.2$  pontos.

$b = 2$ e $a = 1$	
$b = 3$ e $a = 1$	
$b = 2$ e $a = 2$	
$b = 0$ e $a$ qualquer número real	
nenhuma, $M$ é sempre diagonalizável	
todas as afirmações anteriores são falsas	
não sei	

5) Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que a matriz  $[T]_\epsilon$  de  $T$  na base canônica é simétrica. Sabendo que

- $T(1, -1, -1) = (3, -3, -3)$ ,
- todo vetor não nulo do plano  $x - y - z = 0$  é um autovetor,
- o determinante de  $[T]_\epsilon$  é 12, e
- o traço de  $[T]_\epsilon$  é negativo.

Determine os autovalores de  $T$  com suas multiplicidades.

---

**Resposta:**

autovalores:
--------------

6) Considere a transformação linear  $T$  cuja matriz  $[T]$  na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é a verdadeira.

---

A transformação linear  $T$  é:

- (a) O espelhamento no plano  $x + y = 0$ .
- (b) A projeção ortogonal no plano  $x + y = 0$ .
- (c) A projeção ortogonal no plano  $x - y + z = 0$  seguida do espelhamento no plano  $x - y - 2z = 0$ .
- (d) A projeção ortogonal no plano  $x - y + z = 0$  seguido de de espelhamento no plano  $x + z = 0$ .
- (e) A projeção ortogonal no plano  $x - y + z = 0$  seguido de de espelhamento no mesmo plano  $x - y + z = 0$ .
- (f) A projeção ortogonal no plano  $x + y = 0$  seguida do espelhamento no plano  $x - y - 2z = 0$ .
- (g) A projeção ortogonal no plano  $x + y = 0$  seguida do espelhamento no plano  $x - y + z = 0$ .
- (h) A projeção ortogonal no plano  $x + y = 0$  seguida do espelhamento no mesmo plano  $x + y = 0$ .
- (i) A projeção ortogonal no plano  $x - y - 2z = 0$  seguida do espelhamento no mesmo plano  $x - y - 2z = 0$ .
- (j) A projeção ortogonal no plano  $x - y - 2z = 0$  seguido de de espelhamento no plano  $x + y = 0$ .

