Prova tipo A

P4 de Álgebra Linear I – 2008.2

Data: 28 de Novembro de 2008.

Nome:______________________________ **Matrícula:**______

Assinatura:__________________________ **Turma:**________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO.

Provas com os campos não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**2.e**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**3.d**	**soma**
Valor	3.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	10.0
Nota											
Rev.											

Se você está fazendo a prova para aumentar sua nota, escreva no quadro abaixo

NÃO CORRIGIR

caso assim o deseje. Provas corrigidas terão suas notas lançadas.

<u>Instruções – leia atentamente</u>

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• <u>**Verifique**</u>, <u>**revise**</u> e <u>**confira**</u> cuidadosamente suas respostas.

• Escreva de forma clara, ordenada e legível.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta** no lugar a ele destinado. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) <u>**não serão corrigidos**</u>**!!.**

• **Nas questões 2 e 3 <u>justifique cuidadosamente</u> todas as respostas. Responda de forma completa, ordenada e coerente.**

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.*

fonte: mini-Aurélio

1)

a) Considere o plano

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 0.$$

Determine a equação cartesiana de um plano ρ tal que a distância entre ρ e π seja $\sqrt{5}$.

---

b) Determine a equação cartesiana do plano π que contém as retas r e s,

$$r\colon (1+t, 2+t, 1+2\,t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s\colon (1+2\,t, 2\,t, 4\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

c) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cuja matriz na base canônica $[T]_{\mathcal{E}}$ é o produto das matrizes

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Determine uma base η da imagem de T e a equação cartesiana da imagem de T.

Lembre que a imagem de T, $\operatorname{im}(T)$, é o conjunto

$$\operatorname{im}(T) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\}.$$

Não é necessário justificar esta questão.

Critério de correção: (a)=1.0, (b)=1.0, (c)=0.5+0.5.

Somente serão aceitas respostas TOTALMENTE corretas.

Marque as respostas a caneta nos retângulos

Respostas:

(a)

ρ:

(b)

π:

(c)

$\mathrm{im}(T)$:

base η:

2) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$,

$$\beta = \{(1,0,1),\,(1,1,0),\,(1,1,1)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

- $T(1,0,1) = (2,1,1) = (1,0,1) + (1,1,0)$,
- $T(1,1,0) = (2,2,1) = (1,1,0) + (1,1,1)$,
- $T(1,1,1) = (2,1,2) = (1,0,1) + (1,1,1)$.

a) Determine a matriz de T na base canônica.

b) Determine a matriz de T na base β.

c) Determine uma base da imagem da transformação linear T. Lembre que a imagem de T, $\mathrm{im}(T)$, é o conjunto

$$\mathrm{im}(T) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\}.$$

d) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w} = (2,0,1)$ na base β.

e) Determine a matriz de mudança de base da base β para a base canônica.

Observação: as coordenadas dos vetores da base β e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

Justifique cuidadosamente TODOS os itens da sua resposta. Responda de forma completa, ordenada e coerente.

Resposta:

3) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de T

b) Determine uma base de autovetores de T

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\},$$

tal que

- $\overrightarrow{u}_1$ é um autovetor associado a $\sigma < 0$,
- $\overrightarrow{u}_2$ é um autovetor associado a $\lambda > 0$,
- $\overrightarrow{u}_3$ é um autovetor associado a 0.

c) Determine a matriz E de T na base γ.

d) Considere agora a base de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = \{(1,1,1), (2,1,0), (1,0,1)\}.$$

Escreva a matriz P de mudança de base da base canônica para a base α.

Observação: as coordenadas dos vetores da bases γ e α e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

Justifique cuidadosamente TODOS os itens da sua resposta. Responda de forma completa, ordenada e coerente.

Resposta: