P4 de Álgebra Linear I – 2011.2

28 de novembro de 2011.

Nome:____________________________ **Matrícula:**______

Assinatura:____________________________ **Turma:**______

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma). Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**2.a**	**2.b**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**4.a**	**4.b**	**4.c**	**soma**
V	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	0.7	0.7	0.6	10.0
N													

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.
- Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- Se estiver fazendo a prova para subir nota e não quiser que sua prova seja corrigida escreva a caneta de forma clara **Não corrigir** no retângulo no canto superior esquerdo. Caso contrário a prova será corrigida e a nota lançada.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

Questão 1) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine uma base ortonormal β de autovetores de A.

b) Determine a matriz de A na base β escolhida no item (a).

c) Determine a matriz de A^5 na base β escolhida no item (a).

d) Determine uma base γ da imagem de A tal que todo vetor da base γ seja unitário.

Resposta:

Questão 2)

a) Considere uma transformação linear $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que

- não possui inversa,
- não é diagonalizável e
- a matriz de A na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Sabendo que $(1,1)$ é um autovetor determine a, b e c.

b) Considere uma transformação linear $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $[B]$ na base canônica é simétrica e tem traço 3. Sabemos que

$$B(1,0,-1) = 2\,(1,0,-1)$$

e que a imagem de B é o plano

$$\text{imagem}(B) = \{\bar{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}.$$

Determine uma base ortonormal β formada por autovetores de B.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

Questão 3) Considere o sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{v = (x, y, z) \colon x - y + 2\,z = 0\}$$

e as bases ortonormais γ de $\mathbb{W}$ e η de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\Big) \right\}$$

e

$$\eta = \left\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\Big) \right\}.$$

a) Determine as coordenadas do vetor $\bar{v} = (-1, 3, 2) \in \mathbb{W}$ na base γ.

b) Determine uma base ortonormal α de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores da base γ.

c) Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base η é

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a diagonal da matriz de T na base canônica.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

Questão 4) Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2\,y + 3\,z &= 1, \\ x + 3\,y + a\,z &= b. \end{aligned}$$

a) Encontre os valores de a e b para que o sistema tenha solução única.

b) Encontre os valores de a e b para que o sistema tenha infinitas soluções.

c) Encontre os valores de a e b para que o sistema não tenha solução.

Resposta: