P4 de Álgebra Linear I – 2005.2

Data: 28 de novembro de 2005.

Início: 17h:05min Fim: 18h:55min

Nome:____ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	0.5		
1b	1.0		
1c	1.0		
2a	0.5		
2b	1.0		
2c	1.0		
2d	1.0		
2e	1.0		
2f	1.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado. Escreva de forma clara e legível.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**
- **Faça a prova na sua turma.**

1) Considere o conjunto de vetores

$$\gamma = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}.$$

1.a) Obtenha uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores do conjunto γ.

1.b) Determine explicitamente a matriz M de mudança de base da base canônica à base β.

1.c) Considere uma base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1,0,1),(1,1,1),(a,b,c)\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor $v = (1,2,3)$ na base η são

$$(v)_\eta = (1,1,1)$$

determine o vetor (a,b,c).

Resposta:

2) Considere a transformação linear

$$A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica

$$A(1,1,1) = (1,0,1), \quad A(1,0,1) = (1,1,1), \quad A(0,1,1) = (1,0,1).$$

2.a) Estude se a matriz de A na base canônica é ortogonal.

2.b) Determine a matriz de A na base canônica.

2.c) Determine um autovalor λ de A e um autovetor de A associado a λ.

2.d) Determine a equação cartesiana do conjunto imagem de A.

2.e) Determine o conjunto de vetores v de $\mathbb{R}^3$ que verificam

$$A(v) = (2,1,2).$$

2.f) Encontre uma base η onde a matriz de A seja da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

3) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine **explicitamente** matrizes P, P^{-1} e D que verificam

$$M = P\,D\,P^{-1},$$

onde P é ortogonal e D é diagonal.

Resposta: