P4 de Álgebra Linear I – 2003.1
Data: 7 de julho de 2003
07:00 – 08:50

Nome:______________________________ Matrícula:__________
Assinatura:__________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	3.0		
2a	0.5		
2b	0.5		
2c	0.5		
2d	0.5		
2e	0.5		
3a	0.5		
3b	1.0		
3c	1.0		
3d	0.5		
3e	0.5		
4a	0.5		
4b	0.5		
4c	0.5		
Total	10.5		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Desligue o celular.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 da prova não haverá pontuação menor que** 0.5 **– Verifique cuidadosamente suas respostas.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			
1.j			
1.k			

1.a) Considere as retas de equações paramétricas

$$r = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3) \quad \text{e} \quad s = (q_1 + tw_1, q_2 + tw_2, q_3 + tw_3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suponha que

$$(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3)) = 0.$$

Então as retas r e s se interceptam em um ponto.

1.b) Seja A uma matriz 3×3 cujo polinômio caraterístico é

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (3 - \lambda).$$

Então A não é diagonalizável.

1.c) Seja A uma matriz 3×3 tal que para todo par de vetores u e v de $\mathbb{R}^3$ se verifica

$$A(u) \cdot A(v) = u \cdot v.$$

Então 1 ou -1 é um autovalor de A.

1.d) Seja A uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica de determinante -1. Então A representa um espelhamento.

1.e) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e existem autovetores u e w de A tais que $Au = 3u$ e $Aw = -w$, então a soma dos autovalores de A^4 é igual a 82.

1.f) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são 2, 6 e 3.

1.g) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

1.h) As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 222222 & 0 & 0 \\ 222222 & 333333 & 0 \\ 222222 & 333333 & 444444 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 444444 & 0 & 0 \\ 444444 & 222222 & 0 \\ 444444 & 333333 & 333333 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

1.i) Os vetores $\{(1, -1, -1), (1, 0, 1), (1, 2, -1)\}$ formam uma base ortonormal.

1.j) Seja A uma matriz inversível 3×3 cujo traço é 5. Então o traço de A^{-1} é $1/5$.

1.k) Seja A uma matriz 2×2 tal que A^2 é a matriz nula, então A é a matriz nula.

2) Considere o plano $\pi\colon x - y - z = 0$, o ponto $p = (1, 0, 2)$ e as retas $r_1 = (2t, 1, t)$ e $r_2 = (1 + t, 1 - t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine:

(2.a) Uma equação paramétrica da reta r que contém o ponto p e é perpendicular ao plano π.

(2.b) A equação cartesiana do plano ρ que contém o ponto p e é paralelo às retas r_1 e r_2.

(2.c) A distância entre as retas r_1 e r_2.

(2.d) A posição relativa das retas r_1 e r_2.

(2.e) A posição relativa da reta r_2 e o plano π.

3) Considere o plano $\pi : x + y - z = 0$. Considere a projeção ortogonal P no plano π e a projeção Q no plano π na direção da reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3.a) Determine os autovalores de P e de Q.

(3.b) Determine bases de autovetores de P e de Q.

(3.c) Escreva P da forma $P = MDM^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(3.d) Escreva Q da forma $Q = NEN^{-1}$, onde E é diagonal. Determine explicitamente N.

(3.e) Estude se as matrizes de P e Q na base canônica são semelhantes.

4) Seja M uma transformação linear tal que sua matriz $[M]$ na base canônica é uma matriz simétrica tal que

- o traço de $[M]$ é 3,
- o determinante de $[M]$ é nulo, e
- 1 é um autovalor de M.

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Sabendo que $M(1,1,1) = (1,1,1)$ e que todo vetor não nulo do plano $\pi\colon x + y - 2z = 0$ é transformado em um vetor não nulo de π por M, determine uma base de autovetores de M.

(4.c) Encontre uma projeção ortogonal P em uma reta tal que $P \circ M$ seja a transformação linear nula.