Prova tipo D

P4 de Álgebra Linear I – 2002.2

Data: 2 de dezembro de 2002

Horário: 12:00 – 13:50

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:___________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.1		
2	2.4		
3a	1.0		
3b	1.0		
3c	0.5		
3d	0.5		
3e	0.5		
3f	0.5		
4a	0.5		
4b	0.5		
4c	0.5		
4d	0.5		
Total	10.5		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo! A questão pode ter nota negativa!

Para uso exclusivo do professor	*****	*****
Certas:	$\times$ 0.3	
Erradas:	$\times$ -0.2	
*****	Total	

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo.

Atenção: responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			

1.a) Os vetores $(1,1,1)$, $(1,2,1)$ e $(1,3,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Sejam E um espelhamento de $\mathbb{R}^2$ e R uma rotação de $\mathbb{R}^2$. A composição $E \circ R$ é uma rotação.

1.c) Toda matriz 3×3 triangular é diagonalizável.

1.d) As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 77777 & 0 & 0 \\ 77777 & 88888 & 0 \\ 77777 & 88888 & 99999 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 99999 & 0 & 0 \\ 33333 & 77777 & 0 \\ 66666 & 44444 & 88888 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

1.e) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11111 & 2222 & 3333 \\ 2222 & 11111 & 6666 \\ 3333 & 6666 & 11111 \end{pmatrix}$$

possui uma base ortonormal de autovetores.

1.f) As retas $r\colon (t, 1+t, 1+t)$ e $s\colon (2t, 1+2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, são reversas.

1.g) Seja A uma matriz 3×3 ortogonal e simétrica cujo traço é igual a 3. Então A é a identidade.

2) Escolha qual das afirmações a seguir é a verdadeira e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.6, cada resposta errada vale -0.1, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.1.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**N**
2.1							
2.2							
2.3							
2.4							

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2.1) O polinômio característico de A é:

(a) $-\lambda^3 + 5\,\lambda^2 - 6\lambda + 1$.

(b) $-\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - 4\lambda + 5$.

(c) $-\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - 4\lambda + 1$.

(d) $-\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 2\lambda - 5$.

(e) $-\lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 5\lambda + 2$.

(f) Nenhuma das opções anteriores, todas estão erradas.

(2.2) Os autovalores de A são:

(a) 1 (simples) e 2 (de multiplicidade 2).

(b) 0 e 2 (de multiplicidade 2),

(c) 1, -1 e 3,

(d) 1 (de multiplicidade 2) e 2 (simples),

(e) 0, 4 e -1,

(f) Nenhuma das opções anteriores, todas estão erradas.

(2.3) Estude as seguintes afirmações sobre os autovetores de A:

(a) Os vetores $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ e $(1,1,2)$ correspondentes as colunas da matriz A são autovetores de A.

(b) Os vetores $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,-1,2)$ correspondentes as linhas da matriz A são autovetores de A.

(c) Os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,0)$ são autovetores de A.

(d) Os vetores $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,0)$ são autovetores de A.

(e) A matriz A não é simétrica, portanto não possui nenhum autovetor.

(f) Nenhuma das opções anteriores, todas estão erradas.

(2.4) Considere a base $\beta = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$. A matriz de A na base β é:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Nenhuma das opções anteriores, todas estão erradas.

3) Dados o plano $\pi\colon x+y-z=0$ e a reta $r=(-t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$. considere a transformação linear M definida como segue. Dado um ponto $P=(x,y,z)$ considere o vetor $\overline{OP}=(x,y,z)$ e defina

$$M(\overline{OP})=\overline{OQ},$$

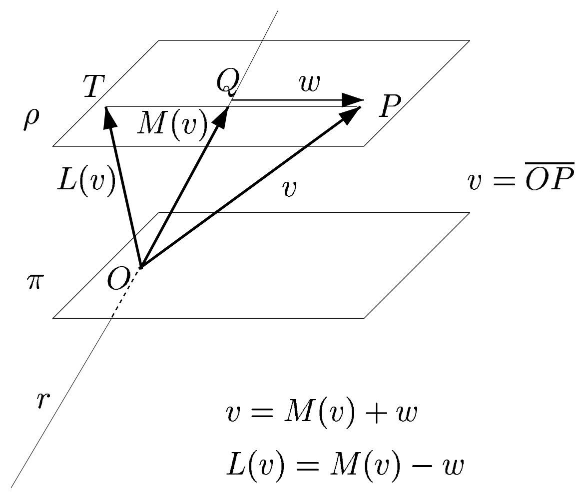
onde Q é o ponto de interseção da reta r e do plano ρ que contém o ponto P e é paralelo a π. Veja a figura.

Considere também a transformação linear L definida como segue,

$$L(\overline{OP})=\overline{OT},$$

onde T é o ponto do plano ρ tal que

- Q é equidistante de T e de P, e
- os pontos P, T e Q são colineares. Veja a figura.



a) Determine a matriz da transformação linear M.

b) Determine a matriz da transformação linear L.

c) Determine uma base de autovetores de M.

d) Determine uma base de autovetores de L.

e) Determine uma forma diagonal de M.

f) Estude se é possível escrever M da forma

$$M = PDP^t,$$

onde P é ortogonal.

4) Considere as retas $r\colon (t, 1-t, 2\,t)$, $t \in \mathbb{R}$, e s obtida como interseção dos planos $\pi\colon x + 2y - z = 1$ e $\rho\colon 2x + y + z = 2$.

a) Determine uma equação paramétrica de s.

a) Determine a equação cartesiana do plano η normal a r que contém o ponto $(1, 2, 3)$.

c) Determine a posição relativa das retas r e s (reversas, paralelas, ou concorrentes).

d) Se as retas são reversas calcule a distância entre elas, se paralelas a equação do plano que as contém, e se concorrentes seu ponto de interseção.