P4 de Álgebra Linear I – 2001.2

Data: 3 de dezembro de 2001.

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:__________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
2c	0.5		
2d	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	1.0		
3d	0.5		
3e	0.5		
4a	1.5		
4b	0.5		
4c	1.0		
Total	10.5		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 da prova não haverá pontuação menor que** 0.5 **– Verifique cuidadosamente suas respostas.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

Para uso exclusivo do professor	*****	*****
Certas:	$\times$ 0.3	
Erradas:	$\times$ -0.2	
*****	Total	

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			

1.a) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e existem vetores u e w tais que $Au = 2u$ e $Aw = -w$, então a soma dos autovalores de A^6 é igual a 63.

1.b) A distância entre o plano de equação $x + y + z = 0$ e o plano de equação $x + y + z = 1$ é igual a 1.

1.c) A reta de equações $x = y = z$ é paralela ao plano de equação $2x - y - z = 3$.

1.d) O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, 1, 0)$ é igual a 3.

1.e) É possível encontrar dois vetores u e v não nulos no plano tais que $\| u + v \| = \| u - v \|$.

1.f) Se u, v e w são três vetores de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre si, então existem α, β e γ números reais não nulos tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}$.

1.g) Seja T uma matriz ortogonal. Então se $Tv = \vec{0}$, então $v = \vec{0}$.

1.h) Se -1, 1 e 1 (isto é, 1 tem multiplicidade 2) são os autovalores de uma matriz A 3×3, então A representa um espelhamento com relação a um plano.

1.i) Se R é uma rotação de 90^o em $\mathbb{R}^3$ e se u não pertence ao eixo de rotação, então $u \cdot Ru = 0$, isto é, u e $R(u)$ são ortogonais.

2) Considere as retas r e s definidas pelas equações:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Determine uma equação paramétrica de r.

2.b) Determine uma equação cartesiana de s, isto é, escreva s como interseção de dois planos dados em equações cartesianas.

2.c) Estude a posição relativa de r e s.

2.d) Se a sua resposta no item (2.c) foi *reversas* ou *paralelas* calcule a distância entre r e s, e se foi *se intersectam* determine a equação cartesiana do plano que contém as retas r e s.

3) Considere $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$.

3.a) Estude se β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

3.b) Considere uma transformação linear A de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ verificando

$$A(1,1,0) = (1,0,1), \quad A(1,0,1) = (0,1,1), \quad A(0,1,1) = (1,0,1).$$

Estude se A é ortogonal.

3.c) Determine a matriz de A na base canônica.

3.d) Determine um autovalor e um autovetor (associado ao autovalor encontrado) de A.

3.e) Encontre uma base onde a matriz de A é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & a & b \\ -1/3 & 2/3 & c \\ -1/3 & -1/3 & d \end{pmatrix}.$$

4.a) Determine a, b, c e d para que P represente uma projeção ortogonal em um plano. Determine a equação do plano de projeção.

4.b) Considere agora a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores de A.

4.c) Finalmente considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Interprete geometricamente B. Nos casos envolvendo projeções determine a reta ou plano de projeção, nos casos envolvendo espelhamentos determine o plano ou reta de espelhamento, e nos casos envolvendo rotações determine o ângulo e o eixo de rotação.