

Prova tipo C

P3 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 17 de novembro 2003

Horário: 17:05 – 18:55

Nome: _____ Matrícula: _____
Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	1.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
3a	1.0		
3b	0.5		
3c	1.0		
4a	0.7		
4b	0.7		
4c	0.5		
5	1.2		
6a	1.0		
6b	1.0		
Total	10.1		

Instruções:

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "N = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta N vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão como erradas. A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.3	0.7	1.2	1.5

Marque no quadro abaixo as respostas. Não é necessário justificar

Itens	V	F	N
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

1.a) Existe uma matriz M , 3×3 , ortogonal e simétrica cujo traço é igual a dois.

1.b) Considere as matrizes

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Defina a matriz M como

$$M = P D P^{-1}.$$

A matriz M é simétrica.

1.c) Sejam $\beta = \{u, v\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 e $[M]$ e $[N]$ as matrizes na base canônica das transformações lineares $M, N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que

$$\begin{aligned} M(u) &= 5u, & M(v) &= 7v \\ N(u) &= \bar{0}, & N(v) &= 3v. \end{aligned}$$

As matrizes produto $[N][M]$ e $[M][N]$ são iguais e simétricas.

1.d) Seja E um espelhamento em um plano de \mathbb{R}^3 . Existe uma base β tal que a matriz de E na base β é

$$[E]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.e) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 111 & 1111 \\ 33 & 333 & 3333 \\ 77 & 777 & 7777 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M são 0 (de multiplicidade dois) e 8121.

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (a, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad w = (2/\sqrt{6}, b, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a terceira coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β .

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

a)

$$a = \quad , b = \quad , c =$$

b)

$$\text{terceira coordenada} =$$

3) Considere a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(u) = (1, 0, -1) \times u$$

e a base ortonormal de \mathbb{R}^3 definida por

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

(3.a) Determine a matriz de T na base β .

(3.b) Determine os autovalores de T .

(3.c) Interprete T como a composição de uma projeção ortogonal, uma rotação e a multiplicação por um escalar (determinando o plano/reta de projeção e o eixo e o ângulo de rotação).

Justifique cuidadosamente sua resposta

Resposta:

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 3 é um autovalor e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de M :

(4.a) Determine os autovalores de M .

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M .

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M .

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

4.a)

autovalores:

4.b)

base $\beta =$

4.c)

$$[D] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad [E] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

5)

Complete com caneta os quadros abaixo. Não é necessário justificar

Seja R uma matriz de rotação em \mathbb{R}^3 de eixo $(14t, 75t, 48t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/6$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	Não
$[R]$ é simétrica		
$[R]$ é ortogonal		

O traço de $[R]$ é	
O determinante de $[R]$ é	

Seja P uma projeção de \mathbb{R}^3 no plano $3x + 29y + 50z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 2)$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	Não
$[P]$ é simétrica		
$[P]$ é ortogonal		

O traço de $[P]$ é	
O determinante de $[P]$ é	

Pontuação:

Cada quadro completo totalmente correto vale 0.3 pontos

Não há pontuações intermediárias

