Prova tipo A

P3 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 17 de novembro 2003

Horário: 17:05 – 18:55

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:__________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	1.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
3a	1.0		
3b	0.5		
3c	1.0		
4a	0.7		
4b	0.7		
4c	0.5		
5	1.2		
6a	1.0		
6b	1.0		
Total	10.1		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão como erradas. A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.3	0.7	1.2	1.5

Marque no quadro abaixo as respostas. Não é necessário justificar

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

1.a) Existe uma matriz M, 3×3, ortogonal e simétrica cujo traço é igual a dois.

1.b) Considere as matrizes

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Defina a matriz M como

$$M = P\,D\,P^{-1}.$$

A matriz M é simétrica.

1.c) Sejam $\beta=\{u,v\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e $[M]$ e $[N]$ as matrizes na base canônica das transformações lineares $M,\ N\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que verificam

$$\begin{array}{llll} M(u) & = 5\,u, & \qquad & M(v) = 7\,v\\ N(u) & = \bar{0}, & \qquad & N(v) = 3\,v. \end{array}$$

As matrizes produto $[N][M]$ e $[M][N]$ são iguais e simétricas.

1.d) Seja E um espelhamento em um plano de $\mathbb{R}^3$. Existe uma base β tal que a matriz de E na base β é

$$[E]_\beta=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.e) Considere a matriz

$$M=\begin{pmatrix} 11 & 111 & 1111\\ 33 & 333 & 3333\\ 77 & 777 & 7777\end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M são 0 (de multiplicidade dois) e 8121.

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (1/\sqrt{2}, 0, a), \quad w = (1/\sqrt{6}, b, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a primeira coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β.

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

a) $a =$ $\qquad$, $b =$ $\qquad$, $c =$

b) primeira coordenada =

3) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(u) = (1, 0, -1) \times u$$

e a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

(3.a) Determine a matriz de T na base β.

(3.b) Determine os autovalores de T.

(3.c) Interprete T como a composição de uma projeção ortogonal, uma rotação e a multiplicação por um escalar (determinando o plano/reta de projeção e o eixo e o ângulo de rotação).

Justifique cuidadosamente sua resposta

Resposta:

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de M:

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M.

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

4.a) autovalores:

4.b) base $\beta =$

4.c) $[D] = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\qquad [E] = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

5)

Complete com caneta os quadros abaixo. Não é necessário justificar

---

Seja R uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ de eixo $(t, 75t, 48t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/4$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	**Não**
$[R]$ é simétrica		
$[R]$ é ortogonal		

O traço de $[R]$ é	
O determinante de $[R]$ é	

Seja P uma projeção de $\mathbb{R}^3$ no plano $3x + 7y + 50z = 0$ na direção do vetor $(1, 1, 1)$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	**Não**
$[P]$ é simétrica		
$[P]$ é ortogonal		

O traço de $[P]$ é	
O determinante de $[P]$ é	

Pontuação:

Cada quadro completo totalmente correto vale 0.3 pontos

Não há pontuações intermediarias

6) Escolha quais das afirmações a seguir é a verdadeira.

Marque com caneta nos quadros abaixo. Não é necessário justificar

Atenção: responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta errada vale -0.1 ponto.

6.1) A matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa:

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) O espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

(d) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(g) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(h) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
6.1											

6.2) A matriz S

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

representa:

(a) A projeção ortogonal no plano $x + y + z = 0$.

(b) A projeção ortogonal no plano $x - y - z = 0$.

(c) A projeção ortogonal na reta $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) A projeção no plano $x + y + z = 0$ na direção do vetor $(1, 0, 1)$.

(e) A projeção na reta $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ na direção do plano $x + y + z = 0$.

(f) O espelhamento no plano $x + y + z = 0$.

(g) O espelhamento na reta $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(h) Uma projeção no plano $x + y + z = 0$ na direção do vetor $(1, 1, 0)$.

(i) A projeção ortogonal no plano $x+y-z = 0$ seguida da projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
6.2											