P3 de Álgebra Linear I – 2012.1

16 de junho de 2012.

Nome:_______________________________________ Matrícula:__________
Assinatura:___________________________________ Turma:__________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**1.e**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**3.d**	**soma**
V	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	1.0	10.0
N													

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.

• Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1) Seja A uma matriz 3×3 com polinômio característico

$$p(\lambda) = \det\big(A - \lambda\, Id\big) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

a) Calcule o determinante de A e o traço de A.

b) Considere a matriz $B = A^3$. Determine o traço de B.

c) Determine se a matriz A possui inversa. Em caso afirmativo determine o traço de A^{-1} (a matriz inversa de A).

Suponha agora que a matriz A é da forma

$$A = P\, D\, P^t,$$

onde D é uma matriz diagonal e P é uma matriz ortogonal.

d) Sabendo que o vetor $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 1, encontre (se possível) uma base ortonormal β formada por autovetores de A.

e) Determine explicitamente as matrizes P e D.

Resposta:

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e observe que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A.

(a) Determine todos os autovalores de A.

(b) Determine (se possível) uma base ortonormal de autovetores de A.

(c) Determine explicitamente matrizes D, P e P^{-1} tais que

$$A = P\,D\,P^{-1},$$

onde D é uma matriz diagonal.

Resposta:

3) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de projeção ortogonal no plano

$$\pi : x + y - z = 0.$$

Isto é, $T(\bar{u}) = u$ se $\bar{u}$ é um vetor paralelo ao plano π e $T(\bar{n}) = \bar{0}$ se $\bar{n}$ é um vetor perpendicular ao plano π.

(a) Determine a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica.

(b) Encontre (se possível) uma base γ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

Determine a matriz $[T]_\eta$ de T na base η.

(d) Determine os autovalores da transformação linear

$$T^5 - 3T^4 + T^3 - T^2 - 3I.$$

Resposta: