P3 de Álgebra Linear I – 2011.2

12 de Novembro de 2011.

Nome:____ Matrícula:____________

Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**soma**
V	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	10.0
N											

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.

• Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1) Considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que os vetores $(1,1,1)$ e $(-1,1,0)$ são dois autovetores de N.

a) Determine uma forma diagonal D de N.

b) Determine uma matriz P tal que $D = P\,N\,P^t$.

c) Considere a matriz N^{-1}. Determine uma forma diagonal E de N^{-1}.

Observação: para resolver esta questão não é necessário calcular o polinômio característico de N.

Resposta:

2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de M e suas multiplicidades. Dica, 3 é um autovalor.

b) Encontre, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de M.

c) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{3,3} \in \mathbb{R}.$$

Determine $a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,2}$ e $a_{3,3}$ para que

- a matriz A tenha um único autovalor λ e
- qualquer conjunto de autovetores linearmente independentes de A associados a λ tenha no máximo um elemento

(as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente).

d) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ -6 & b_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } b_{2,2}, b_{2,3}, b_{3,2} \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que

- a matriz B não possui inversa,
- 3 é um autovalor de B e
- $(1, 1, 0)$ é um autovetor de B,

determine $b_{2,2}, b_{2,3}$ e $b_{3,2}$.

Resposta:

3) Considere as bases β e γ de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,0)\},$$

e

$$\gamma = \{(103,104,105),(104,105,106),(105,106,108)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$T(1,1,1) = (3,2,3), \quad T(1,0,1) = (2,0,2), \quad T(1,2,0) = (1,1,1).$$

a) Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) Considere a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ. Determine o traço de $[T]_\gamma$.

c) Determine, se possível, uma forma diagonal D de T. Caso não exista, justifique sua resposta.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta: