P3 de Álgebra Linear I – 2011.1

4 de junho de 2011.

Nome:______________________________ Matrícula:__________
Assinatura:____________________________ Turma:__________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**1.e**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**3.d**	**3.e**	**soma**
V	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	0.5	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	10.0
N														

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.
- Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1) Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine todos os autovalores de A.

(b) Determine, se possível, uma forma diagonal de A.

(c) Determine, se possível, uma base δ (escrita na base canônica) tal que a matriz $[A]_\delta$ de A na base δ seja

$$[A]_\delta = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine, se possível, uma base γ de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A que **não** seja ortogonal.

(e) Determine se $[A]$ é semelhante a alguma (ou algumas, ou nenhuma, ou todas) das matrizes B, C, E a seguir

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Sabendo que

$$T(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

e que $T(v) = 2\,v$ caso v pertença ao plano $x + y + z = 0$.

(a) Seja $[T]_{\mathcal{E}}$ a matriz de T na base canônica. Determine **explicitamente** matrizes P e D, onde D é diagonal, tais que

$$[T]_{\mathcal{E}} = P\,D\,P^{-1}.$$

(b) Calcule o traço de $[T^3]_{\mathcal{E}}$.

(c) Suponha que as matrizes A e B são diagonalizáveis e que possuem a mesma base de autovetores. Decida se $A\,B = B\,A$.

Resposta:

3) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear não nula (isto é, existe algum vetor $\bar{v}$ tal que $T(\bar{v}) \neq \bar{0}$). Sabendo que

- a matriz $[T]$ de T na base canônica possui traço e determinante iguais a zero,
- $T^3 = T$ e
- $[T] = Q\,D\,Q^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal e Q é uma matriz ortogonal da forma

  $$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & x \\ 0 & 1/\sqrt{3} & y \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & z \end{pmatrix}$$

  cujo determinante é igual a 1.

Responda:

a) Determine **todos** os possíveis valores (x, y, z).

b) Determine uma matriz 3×3 diagonal E que não é nula, possui traço e determinante iguais a zero e verifica $E^3 = E$.

c) Determine os autovalores da matriz $[T]$.

d) Determine **explicitamente** uma matriz $[T]^2$ que verifique as condições do enunciado.

e) Calcule a primeira coluna da matriz $[T]^{500}$.

Resposta: