P3 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 19 de novembro de 2004.

Nome:________________________________ Matrícula:__________
Assinatura:____________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	0.5		
1d	1.0		
2a	1.0		
2b	0.5		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
3c	0.5		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.5		

Duração: 1 hora 45 minutos

Instruções

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear o caderno de prova.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- Escreva de forma clara e legível.
- **Justifique** de forma clara, ordenada e completa suas respostas. Respostas sem justificar não serão consideradas e terão nota zero.

1) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A e suas multiplicidades.

(b) Para cada autovalor λ de A determine o número máximo de autovetores linearmente independentes que existem e mostre um conjunto de tais autovetores.

(c) Decida se A é diagonalizável. Em caso afirmativo determine uma forma diagonal D de A.

(d) Encontre, se possível, uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de A na base β seja

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(2) Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\},$$

$$\gamma = \{(1/3, 2/3, 2/3), (2/3, -2/3, 1/3)(2/3, 1/3, -2/3)\}.$$

Determine:

(a) A matriz M de mudança de coordenadas da base canônica para a base β.

(b) As coordenadas do vetor $(1, 2, 3)$ na base β.

(c) A primeira coluna da matriz de mudança de coordenadas da base β para a base γ.

Resposta:

(3)

(a) Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & b & e \\ -1/3 & c & f \\ a & d & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Determine $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$ para que a matriz P represente, na base canônica, uma projeção ortogonal em uma reta paralela a um vetor da forma $(t, 1, 1)$ para certo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} 2/3 & n & r \\ 1/3 & p & s \\ m & q & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Determine $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ para que a matriz E represente, na base canônica, um espelhamento em um plano.

(c) Determine o plano de espelhamento do item (b).

Resposta:

(4) As matrizes M e N a seguir representam, na base canônica, cisalhamentos, multiplicações por um escalar, projeções ortogonais em retas ou planos, espelhamentos em retas ou planos, rotações, ou composições destas transformações lineares.

Determine de que tipo de transformação linear se trata em cada caso. Quando a transformação linear (ou a composição) envolver projeções, determine o plano ou a reta de projeção. Quando envolver espelhamentos, determine o plano ou a reta de espelhamento. Quando envolver rotações, determine o eixo e o $\cos\alpha$ do ângulo α de rotação.

(a)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Lembre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: