Prova tipo D

P3 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 18 de junho 2003

Horário: 07:00 – 09:50

Nome:____ Matrícula:____________

Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	3.0		
2	2.0		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	0.5		
4a	0.5		
4b	0.5		
4c	0.5		
4d	0.5		
4e	0.5		
4f	0.5		
5a	0.5		
5b	0.5		
5c	0.5		
Total	11.0		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 3, 4 e 5 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!. A questão pode ter nota negativa!

Para uso exclusivo do professor	*****	*****
Certas:	$\times$ 0.3	
Erradas:	$\times$ -0.2	
*****	Total	

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			
1.j			

1.a) Seja A uma matriz simétrica 3×3 cujo determinante é zero e cujo traço é 2, então A representa uma projeção ortogonal em um plano.

1.b) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

1.c) A inversa de uma matriz é uma matriz simétrica.

1.d) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 555555 & 666666 & 777777 \\ 666666 & 888888 & 999999 \\ 777777 & 999999 & 1111111111111 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

1.e) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2222 & 3333 & 5555 \\ 4444 & 6666 & 11110 \\ 6666 & 9999 & 16665 \end{pmatrix}$$

tem autovalores 0 (de multiplicidade 2) e $2222 + 6666 + 16665 = 25553$.

1.f) Seja A uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^3$, então, para todo par de vetores v e w de $\mathbb{R}^3$, se verifica

$$A(v) \times A(w) = v \times w.$$

1.g) Duas matrizes 2×2 com o mesmo polinômio característico, o mesmo traço e o mesmo determinante são semelhantes.

1.h) Seja A uma matriz simétrica 3×3 cujo determinante é 15. Suponha que 1 e 3 são autovalores de A. Então o traço de A é 9.

1.i) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix},$$

como os vetores coluna são unitários e o primeiro vetor $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ é ortogonal aos outros vetores coluna $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ e $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a matriz A é ortogonal.

1.j) Sejam A, B e C matrizes 3×3 simétricas não nulas tais que os $AB = AC$, então $B = C$.

2) Escolha qual das afirmações a seguir é a verdadeira e marque **com caneta** sua resposta nos respetivos quadros. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.5, cada resposta **N** vale 0, cada duas respostas erradas o aluno perde -0.1 pontos. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.1.

2.1) A matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) O espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

(d) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(g) Una rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(h) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.1											

2.2) A matriz B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) O espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

(d) A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$.

(g) A projeção ortogonal no plano $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$.

(h) O espelhamento no plano $x + y = 0$ seguido da projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$.

(i) A transformação $T(u) = u \times v$, onde $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.2											

2.3) A matriz C

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa:

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(d) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(g) A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$.

(h) A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$ seguida do espelhamento no plano $x + y = 0$.

(i) A transformação $T(u) = u \times v$, onde $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.3											

2.4) A matriz D

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa:

(a) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(b) A projeção ortogonal no plano $-x - 2y + z = 0$.

(c) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $-x - 2y + z = 0$.

(d) A projeção ortogonal no plano $x - y - z = 0$.

(e) A projeção no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 0)$.

(f) A projeção no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 1, 0)$.

(g) O espelhamento no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 0)$.

(h) Uma projeção na reta de equações cartesianas $x+y = 0$ e $-x-2y+z = 0$.

(i) A projeção na reta de equações cartesianas $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ na direção do vetor $(-1, -2, 1)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.4											

3) Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ de 45 graus e eixo a reta (at, bt, ct), $t \in \mathbb{R}$, e P uma projeção ortogonal em um plano π contendo o eixo de rotação de R.

3.a) Determine os autovalores da transformação linear $P \circ R$.

3.b) Determine dois autovetores linearmente independentes de $P \circ R$.

3.c) Estude se $P \circ R$ é diagonalizável e em caso afirmativo determine uma forma diagonal de $P \circ R$.

Dica: escreva as tranformações lineares em uma base conveniente, por exemplo, em uma base ortonormal contendo o vetor diretor do eixo de rotação e um vetor do plano de projeção...

4) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de A.

b) Determine uma base β de autovetores de A.

c) Determine a matriz de A na base β.

d) Encontre, se possível, uma forma diagonal de A.

e) Encontre uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.

f) Interprete P.

5) Seja A uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de A na base canônica tem determinante zero e traço 2. Sabendo que $A(1,1) = (0,0)$:

(5.a) Determine os autovalores de A.

(5.b) Determine uma base de autovetores de A.

(5.c) Determine a matriz A.