P3 de Álgebra Linear I – 2002.1
Data: 7 de junho de 2002.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

1.a) Seja A uma matriz simétrica inversível. Então sua inversa também é simétrica.

1.b) A multiplicação de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

1.c) Sejam A uma matriz 3×3 e D uma matriz diagonal tais que $A = PDP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então A é simétrica.

1.d) Seja A uma matriz 3×3 diagonalizável. Suponha que $B = PAP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então B é diagonalizável.

1.e) Sejam A uma matriz 3×3 e σ e λ autovalores de A. Então $\sigma + \lambda$ é um autovalor de A.

1.f) Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ de ângulo α e eixo de rotação a reta r que contém a origem. Então, para todo vetor não nulo u de $\mathbb{R}^3$, se verifica que o ângulo entre u e $R(u)$ é α.

1.g) Seja A uma matriz ortogonal 3×3. Então o determinante de A é ± 1.

1.h) Seja A uma matriz diagonalizável. Então A^3 também é diagonalizável.

1.i) Seja A uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica. Então A é a identidade ou representa um espelhamento.

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Determine

(2.a) a, b e c para que A represente uma projeção ortogonal,

(2.b) a, b e c para que A represente um espelhamento,

(2.c) a, b e c para que A represente uma rotação.

Considere agora a matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & a & b \\ 1/3 & c & d \\ 1/3 & e & f \end{pmatrix}.$$

(2.d) Determine a, b, c, d, e e f para que B represente uma projeção ortogonal em uma reta.

(2.e) Determine a reta de projeção de B.

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,1,1) = (-1,-1,-1), \quad T(1,1,-2) = (1,1,-2).$$

Sabendo que a matriz de T é simétrica e possui determinante zero:

(3.a) Determine os autovalores de T.

(3.b) Determine uma base de autovetores de T.

(3.c) Escreva T da forma $T = PDP^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal.

(3.d) Calcule explicitamente T^{1000}.

4) Determine quais das matrizes a seguir são diagonalizáveis. Nos caso afirmativos encontre uma base de autovetores e uma forma diagonal das matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$