Prova tipo J

P2 de Álgebra Linear I – 2003.2
13 de outubro de 2003

Nome:______________________________ Matrícula:

Assinatura:______________________________ Turma:

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	0.5		
2a	0.5		
2b	1.0		
2c	0.5		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	0.5		
5	1.0		
6	1.0		
Total	10.0		

1) Estude a veracidade das seguintes afirmações.

1.a) Seja $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\gamma = \{u_1 + u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 - u_3, 2u_1 + u_2 + 6u_3\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Sejam ρ e π dois planos não paralelos de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem (ou seja os planos se interceptam em uma reta). Sejam $\alpha = \{v_1, v_2\}$ uma base de π e $\tau = \{w_1, w_2\}$ uma base de ρ. Então $\epsilon = \{v_1, v_2, w_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.c) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(u + w) = T(u) + 2T(w),$$

para todo par de vetores u e w.

2) Considere os vetores

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,1,0), & v_2 = (2,0,1), & v_3 = (1,-3,2), \\ v_4 = (2,2,0), & v_5 = (3,1,1), & v_6 = (2,3,a). \end{array}$$

2.a) Determine o valor de **a** no vetor v_6 para que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 gerem um plano π.

2.b) Usando os vetores do item anterior, determine uma base β do plano π (ou seja os vetores da base são escolhidos entre os vetores $v_1, \ldots, v_6$) e determine as coordenadas do vetor $(5,1,2)$ na base β.

2.c) Encontre uma base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que o vetor $v = (1,2,3)$ tenha coordenadas $(1,2,0)$ na base α.

3)

a) Seja w um vetor de $\mathbb{R}^3$ e $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $M(u) = u \times w$. Sabendo que a matriz de M é

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine o vetor w.

b) Considere agora o vetor $v = (1, 1, 2)$ e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(u) = u \times v.$$

Determine a matriz $[T]$ de T.

4) Considere a projeção P no plano $2x + y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 1, 1)$.

(a) Determine a matriz de P.

(b) Encontre a equação cartesiana de um plano cuja imagem pela transformação P seja a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

5) Considere os pontos $A = (1, 1)$ e $B = (3, 4)$ de $\mathbb{R}^2$. Determine um ponto C tal que A, B e C sejam os vértices de um triângulo equilátero.

6) Determine **a**, **b** e **c** para que a matriz $[P]$ represente uma projeção em uma reta.

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & c \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine a reta e a direção de projeção (isto é, a equação cartesiana do plano que dá a direção de projeção na reta).