Prova tipo C **Duração: 1 hora 45 minutos**

P2 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 8 de outubro de 2004.

Nome:______________________________ Matrícula:____________

Assinatura:______________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	0.5		
3c	0.5		
4a	1.0		
4b	0.5		
5a	1.0		
5b	0.5		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear os cadernos (prova e rascunho).
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- **Respostas a caneta**. Escreva de forma clara e legível.
- V. somente deverá entregar este caderno. Faça os cálculos das questões 1, 2 e 3 nas folhas de rascunho.
- Nas questões 4 e 5 justifique de forma clara, ordenada e completa suas respostas. Respostas sem justificar não serão consideradas.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

Atenção: responda **todos** os itens, use "N= não sei"caso você não saiba a resposta.

- Cada resposta certa vale 0.4.
- Cada resposta **N** vale 0.
- Respostas confusas e ou rasuradas serão contabilizadas como erradas.
- A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela progressiva:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.3	0.8	1.4	2.0

Marque com caneta no quadro abaixo as respostas

Não é necessário justificar

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

1.a) Seja M uma matriz quadrada 2×2 tal que

$$M^2 = M \circ M = M.$$

Então, pelas propriedades dos determinantes

$$\det(M^2) = \det(M \circ M) = \det(M)\ \det(M) = \det(M),$$

onde $\det(M)$ denota o determinante de uma matriz quadrada M. Simplificando, (dividindo por $\det(M)$),

$$\det(M) = 1 \neq 0,$$

portanto M tem inversa.

1.b) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,1) = (2,1,1), \quad T(0,1,1) = (3,1,1), \quad T(2,2,4) = (10,4,4).$$

1.c) Considere o vetor $(1,1,1)$ e a transformação

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1,1,1) + v \times v.$$

A transformação T é linear.

1.d) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,a), \quad v_3 = (3,1,a).$$

Os vetores v_1, v_2 e v_3 são sempre linearmente independentes, independentemente do valor de $a \in \mathbb{R}$.

1.e) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(v) = L(v) + b,$$

onde L é uma transformação linear inversível, $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e b é um vetor de $\mathbb{R}^2$.

Então T é inversível e sua inversa é

$$T^{-1} = L^{-1} - b.$$

2)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,1,0); (0,1,1); (1,0,1)\}$$

Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (3,3,4)$ na base β.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_2, u_3 + u_1, u_2 + u_3\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (4,3,3),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(2,1,1); (1,2,k); (k,k,3)\}$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Somente respostas. Marque as respostas a caneta nos retângulos

a) $(v)_\beta =$

b) $(w)_\delta =$

c) $k =$

3) Considere o vetor $(3,2,1)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (3,2,1).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine (explicitamente) dois vetores não nulos e diferentes u e w de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(u) = T(w) \neq \bar{0}.$$

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

Somente respostas. Marque as respostas a caneta nos retângulos

a) $[T] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

b) $u =$ $w =$

c) im (T):

4)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{2,1}$ da matriz C.

$\boxed{\textbf{Justifique de forma clara, ordenada e completa sua resposta}}$

Resposta:

(5) Considere a reta r de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon y = 4\,x + 1$$

e o vetor $v = (1,1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta* r *na direção do vetor* v, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1,1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T.

(b) Determine a forma matricial de T.

Justifique de forma clara, ordenada e completa sua resposta

Resposta: